

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

BERNARD LE FUR

— 3 + 6 —

1^{re} THÈSE

NOUVELLE MÉTHODE DE RÉOLUTION PAR ITÉRATION
DES ÉQUATIONS DYNAMIQUE ET THERMIQUE DE LA COUCHE LIMITE LAMINAIRE

2^e THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

DISTRIBUTION DES TEMPÉRATURES DE FROTTEMENT
SUR DES MAQUETTES D'AILE DROITE ET D'AILE EN FLÈCHE

Soutenues le 13 décembre 1960, devant la Commission d'Examen

— 25 —

Jury	{	MM. PÉRÈS	{	Président.
		BRUN		Examineurs.
		GERMAIN		



THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

BERNARD LE FUR

1^{re} THÈSE

NOUVELLE MÉTHODE DE RÉOLUTION PAR ITÉRATION
DES ÉQUATIONS DYNAMIQUE ET THERMIQUE DE LA COUCHE LIMITE LAMINAIRE

2^e THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

DISTRIBUTION DES TEMPÉRATURES DE FROTTEMENT
SUR DES MAQUETTES D'AILE DROITE ET D'AILE EN FLÈCHE

Soutenues le 11 juin 1960, devant la Commission d'Examen

Jury	{	MM. PÉRÈS	{	Président.
		BRUN		Examineurs.
		GERMAIN		

NOUVELLE MÉTHODE
DE RÉOLUTION PAR ITÉRATION
DES ÉQUATIONS
DYNAMIQUE ET THERMIQUE
DE LA COUCHE LIMITE LAMINAIRE

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

Doyen J. PÉRÈS

PROFESSEURS

G. JULIA	T	Analyse supérieure et algèbre supérieure.	TRILLAT	T	Microscopie et diffract. électronique.
DE BROGLIE	T	Théories physiques.	WIEMANN	T	Chimie organique et structur.
PRENANT	T	Anatomie et histol. comparées.	JACQUINOT	T	Spectroscopie et phys. céleste.
PÉRÈS	T	Mécanique des fluides et applications.	VASSY	T	Physique de l'atmosphère.
BARRABÉ	T	Géologie struct. et géologie appliquée.	DESTOUCHES	T	Théories physiques.
BOURCART	T	Géogr. physique et géol. dynamique.	PRUVOST	T	Géologie.
PLANTEFOL	T	Botanique.	AMIEL	T	Chimie générale.
GRASSÉ	T	Évolution des êtres organisés.	HOCART	T	Minéralogie.
PRÉVOST	T	Chimie organique.	J.-P. MATHIEU	T	Physique (Orsay).
BOULIGAND	T	Application de l'analyse à la géométrie.	COUTEAUX	T	Biol. animale (P.C.B.).
CHAUDRON	T	Chimie appliquée.	MAY	T	Zoologie (Orsay).
WYART	T	Minéralogie.	CHOQUET	T	Théor. des fonctions et topologie.
TEISSIER	T	Zoologie.	FELDMANN	T	Biol. végétale marine.
MANGENOT	T	Biologie végétale.	GUINIER	T	Physique des solides.
P. AUGER	T	Physique quantique et relativité.	JOST	T	Physiologie comparée.
MONNIER	T	Physiologie générale.	FORTET	T	Calcul des prob. et physique mathématique.
PIVETEAU	T	Paléontologie.	SCHWARTZ	T	Calc. diff. et intégr.
ROCARD	T	Physique (E.N.S.).	CHOUARD	T	Physiologie végétale.
H. CARTAN	T	Mathématiques (E.N.S.).	MALAVARD	T	Aviation.
LAFFITTE	T	Chimie générale.	BRELOT	T	Calcul différentiel.
FAVARD	T	Géométrie supérieure.	NORMANT	T	Synthèse organique.
COULOMB	T	Physique du globe.	BÉNARD	T	Chimie minérale.
M ^{lle} COUSIN	T	Biologie animale (S.P.C.N.).	BUVAT	T	Botanique (E.N.S.).
CHRÉTIEN	T	Chimie minérale.	DUGUÉ	T	Statistiques mathém.
P. DRACH	T	Zoologie.	GELOSO	T	Chimie (S.P.C.N.).
KASTLER	T	Physique (E.N.S.).	SOULAIRAC	T	Psychophysiologie.
EPHRUSSI	T	Génétique.	ULRICH	T	Physiologie végétale.
WURMSER	T	Biologie physico-chimique.	MARÉCHAL	T	Optique théorique et appliquée.
RIVIÈRE	T	Géologie (S.P.C.N.) (Orsay).	KIRRMANN	T	Théories chimiques.
GAUTHERET	T	Biol. végétale (P.C.B.).	CHADEFAUD	T	Botanique.
LUCAS	T	Recherches physiques.	M ^{lle} LE BRETON	T	Physiol. générale.
A. THOMAS	T	Biol. cellulaire.	SALEM	T	Mathématiques générales.
ARNULF	T	Optique appliquée.	LELONG	T	Mathématiques générales.
M. MORAND	T	Enseignement de physique.	DEVILLERS	T	Anatomie et histol. comparées.
SOLEILLET	T	Physique (P.C.B.).	EHRESMANN	T	Topologie algébrique.
FORTIER	T	Mécanique expérimentale des fluides.	FRANÇON	T	Physique (S.P.C.N.).
DANJON	T	Astronomie.	GLANGEAUD	T	Géogr. physique et géologie dynamique.
PETIT	T	Biologie maritime.	GODEMENT	T	Mathématiques (M.G.P.).
QUENEY	T	Météorologie et dynamique atmosphérique.	PISOT	T	Techniques mathém. de la physique.
GALLIEN	T	Embryologie.	ROCH E.	T	Géologie.
EICHHORN	T	Biologie végétale (S.P.C.N.).	SCHATZMANN	T	Astrophysique.
DE CUGNAC	T	Biologie végétale (S.P.C.N.).	TERNIER	T	Paléontologie stratigraphique.
M ^{lle} CAUCHOIS	T	Chimie physique.	ZAMANSKY	T	Mathématiques générales.
THELLIER	T	Physique du globe.	LENNUIER	T	Physique (M.G.P.).
L'HÉRITIER	T	Génétique.	RIZET		Génétique.
GRIVET	T	Radio-électricité.	ROUTHIER	T	Géologie appliquée.
PONCIN	T	Mécanique générale.	M ^{me} TONNELAT	T	Relativité.
DUBREIL	T	Arithmétique et théorie des nombres.	DIXMIER	T	Mathématiques (M.P.C.).
QUELET	T	Chimie organique.	SOUCHAY	T	Chimie générale.
CAGNIARD	T	Géophysique appliquée.	AIGRAIN	T	Électrotechn. générale.
CHAMPETIER	T	Chimie macromolécul.	BRUSSET		Chimie minérale.
CUVILLIER	T	Micropaléontologie.	M. LEVY	T	Physique théorique des hautes énergies.
JUNG	T	Pétrographie.	M ^{me} CHAIX		Chimie biologique.
			M ^{me} HUREL-PY		Biol. vég. (P.C.B.).
			PIAUX		Chimie (M.P.C.).

BRUN	T	Mécanique expér. des fluides.	FRIEDEL	Physique des solides.
LEDERER	T	Chimie biologique.	M. JULIA	Étude des molécules organiques complexes.
M ^{me} DUBREIL ..	T	Mathématiques.	LENDER	Biol. animale (S.P.C.N.) (Orsay).
M ^{me} LELONG ..	T	Mathém. (E.N.S.).	MAGAT	Physico-chimie des rayonnements.
BELLAIR	T	Géologie (S.P.C.N.).	M ^{lle} QUINTIN ..	T Électrochimie.
COTTE	T	Physique (Orsay).	MONOD	T Chimie du métabolisme.
J.-E. DUBOIS ..	T	Chimie organique.	BENOIT	T Physiologie animale.
LAMOTTE		Zoologie (E.N.S.).	DE POSSEL	T Analyse numérique.
MICHEL André ..	T	Chimie (S.P.C.N.).	CHARLOT	T Chimie analytique.
OLMER	T	Energétique générale.	HAISSINSKY ...	T Radiochimie.
ROUAULT	T	Physique générale.	LEMÉE	T Physiologie (B.M.P.V.).
GAUTHIER	T	Mécanique appliquée.	GUÉRIN	T Chimie (M.P.C.).
BARCHIEWITZ ...	T	Chimie physique.	M. CHATELET ..	Chimie (S.P.C.N.).
BROSSEL	T	Physique atomique.	JEAN	Physique nucléaire et radioactivité.
BUSER		Physiologie comparée.	MATTLER	Physique (S.P.C.N.).
CAMUS		Physiol. vég. (3 ^e cycle).	MICHEL (Louis) .	Physique théorique des hautes énergies.
CASTAING		Physique générale.	RUMPF	Chimie (P.C.B.).
CURIEN		Minéralogie et cristallographie.	BERGERARD ...	Zoologie (Orsay).
MOYSE	T	Physiol. vég. (Orsay).	BERTEIN	Électronique.
PANNETIER		Chimie (S.P.C.N.).	BOUSSIÈRES ..	Chimie des radio-éléments.
POSSOMPES	T	Zoologie.	M ^{me} COUTURE ..	Physique (P.C.B.).
PULLMANN		Chimie théorique.	ELLENBERGER..	Géologie structurale et géologie appliquée.
TEILLAC		Physique nucléaire et radioactivité.	FRANC	Biologie animale.
TONNELAT		Biol. physico-chimique.	SCHNELL	Botanique tropicale.
VILLE	T	Économétrie.	STOLKOWSKI ...	Physiologie générale.
WILLEMART		Chimie (P.C.B.).	ACHER	Chimie biologique (Orsay).
DODÉ	T	Chimie (S.P.C.N.) (Orsay).	BAUDOIN	Biologie animale (P.C.B.).
FREYMANN	T	Physique générale.	BEAUMONT	Biologie animale (S.P.C.N.).
GUINOCHE	T	Biol. vég. (Orsay).	BLAMONT	Géophysique ionosphère.
ROLLET	T	Chimie (P.C.B.).	BOURREAU	Biologie végétale (S.P.C.N.) (Orsay).
M ^{lle} JOSIEN ...	T	Chimie (P.C.B.).	D. CURIE	Physique (M.G.P.).
CHEVALLEY ...	T	Géométrie algébrique et théorie des groupes.	DURAND-DELGA	Géologie.
ARNOULT	T	Électronique.	FRÉON	Chimie (P.C.B.).
CHAPELLE	T	Physique (M.P.C.) (Orsay).	HELLER	Physiologie végétale.
DELANGE	T	Mathématiques (Orsay).	TORTRAT	Calcul des probabilités.
DENY	T	Mathématiques (M.G.P.).	CAILLEUX	Géologie (S.P.C.N.).
GERMAIN	T	Mécanique théorique des fluides.	MAGNAN	Physique (M.P.C.).
G. LUCAS	T	Géologique.	DAUDEL	Mécanique ondulatoire appliquée à la chimie théorique et à la physique nucléaire.
ALLARD		Chimie physique.	M ^{lle} FOURCROY .	Biologie végétale (S.P.C.N.).
BERTHELOT		Physique nucléaire et radioactivité.		
BRICARD		Météorologie et physique de l'atmosphère.		
M ^{me} ALBE-FESSARD		Psychophysiol.		

Secrétaire général Ch. MONIER

A mon Maître,
le Professeur Edmond BRUN

A Jacqueline et Anne

Je prie M. le Professeur Edmond BRUN de bien vouloir trouver ici l'expression de ma reconnaissance pour ses conseils qui m'ont été d'une grande utilité, ainsi que pour l'encouragement que j'ai toujours trouvé auprès de lui.

J'adresse mes vifs remerciements à M. le Professeur Paul GÉRMAIN, qui a bien voulu examiner les aspects mathématiques de cette étude.

Je remercie également M. le Doyen Joseph PÉRÈS et M. le Professeur Lucien MALAVARD, qui se sont intéressés au développement de ce travail; ainsi que M. l'Ingénieur Général Pierre VERNOTTE, qui en a accepté l'impression dans les Publications Scientifiques et Techniques du Ministère de l'Air.

PRÉFACE

Les méthodes de calcul de la couche limite laminaire ont déjà fait l'objet de nombreux mémoires. Celle que présente M. Bernard LE FUR se distingue des méthodes usuelles par sa généralité; elle conduit à un ensemble très complet de résultats concernant les écoulements plans ou méridiens; certains de ces résultats étaient déjà connus, mais ils se présentent ici sous une forme coordonnée, remarquablement claire.

*
* *

Les propriétés du fluide sont d'abord supposées constantes. Les équations sont résolues, à l'aide du calcul opérationnel, par un procédé d'itération.

La première approximation, qui consiste à linéariser les équations, permet d'obtenir les valeurs approchées des tensions pariétales de frottement et les densités pariétales de flux de chaleur, lorsque la distribution des pressions pariétales et celle des températures pariétales sont quelconques. Comme résultat de ce premier calcul, on trouve que le facteur thermique pariétal de frottement r est indépendant du gradient de pression; son expression analytique permet déjà de mieux rendre compte de sa variation en fonction du nombre de Prandtl $\mathcal{R}$ que ne le fait la formule empirique $r = \sqrt{\mathcal{R}}$.

La solution générale est obtenue, en deuxième approximation, par application du théorème de POLI, qui permet d'obtenir l'image du produit de deux fonctions. Il fallait comparer, sur un cas particulier, les résultats numériques donnés par cette deuxième approximation aux valeurs exactes obtenues par intégration numérique. C'est le cas particulier des dièdres qui a été choisi. Les deux séries de valeurs des coefficients locaux de frottement C_f et des nombres de Nusselt locaux $\mathcal{N}_x$ ne diffèrent que de quelques pour cent.

Dans le cas des nombres de Prandtl élevés (liquides visqueux), les équations de la couche limite laminaire se simplifient: l'auteur a pu montrer, dans un tel cas, que le facteur thermique pariétal est proportionnel à la racine cubique du nombre de Prandtl et dépend relativement peu du gradient de pression. Dans ces mêmes conditions, il a réussi à compléter la formule de Lighthill, qui donne la densité pariétale de flux de chaleur, en faisant intervenir l'échauffement cinétique.

*
* *

Dans la deuxième partie de l'exposé, les propriétés du fluide ne sont plus supposées constantes, mais l'hypothèse est faite que l'on peut remplacer le produit $\mu\rho$ de la viscosité par la masse volumique, par la valeur qu'il prend à la paroi; cette hypothèse, souvent utilisée depuis son introduction par CHAPMAN et RUBESIN, a été justifiée par des résultats expérimentaux, au moins dans un domaine de nombres de Mach pas trop élevés.

Il fallait alors, en utilisant une transformation de variables généralisant la transformation d'ILLINGWORTH-STEWARTSON, ramener les équations générales de la couche limite à celles qui supposent les propriétés physiques constantes. L'auteur a pu effectuer une telle transformation dans le cas d'un nombre de Prandtl différent de l'unité et pour des distributions quelconques de pression pariétale et de température pariétale. Ainsi, toutes les méthodes, exactes ou approchées, mises au point dans le cas des propriétés physiques constantes, peuvent être appliquées, après cette transformation de variables, au cas général avec, toutefois, la supposition du produit $\mu\rho$ constant.

Des comparaisons numériques, dans le cas du nombre de Prandtl égal à l'unité, ont été faites entre les résultats obtenus à partir des solutions de HARTREE en incompressible et les valeurs obtenues, pour le fluide à propriétés physiques variables, par COHEN et RESHOTKO : on sait que ces dernières valeurs résultent de l'intégration numérique d'équations qui supposent toujours l'hypothèse de CHAPMAN et RUBESIN. Les valeurs du coefficient de frottement et du nombre de Nusselt sont d'autant plus voisines que le flux de chaleur pariétal est plus faible.

Dans le cas particulier de la solution général où la température absolue de paroi θ_p est faible devant la température absolue totale θ_0 , B. LE FUR montre que la densité de flux de chaleur pariétale est donnée par la formule de Lester LEES, laquelle avait été obtenue à partir d'autres considérations.

*
* *

Les quelques indications précédentes suffisent, je pense, à montrer l'intérêt du travail ici présenté, qui a constitué la thèse de Doctorat d'État de B. LE FUR. Je lui avais demandé, en vue d'une présentation homogène, de ne pas faire figurer dans ce mémoire les quelques résultats expérimentaux qu'il avait obtenus au laboratoire d'aérothermique du Centre National de la Recherche Scientifique, dès le début de son travail ; mais je voudrais souligner que ces expériences, bien que fragmentaires, ont été conduites avec beaucoup d'habileté ; elles sont d'ailleurs poursuivies en collaboration avec d'autres chercheurs, et donneront lieu à une publication ultérieure.

Edmond A. BRUN.

TABLE DES MATIÈRES

PAGES

NOTATIONS UTILISÉES	1
---------------------------	---

PREMIÈRE PARTIE

OBSTACLE BIDIMENSIONNEL (Propriétés physiques constantes)

INTRODUCTION	5
CHAPITRE PREMIER. — Équations générales	7
1,1 Équations de PRANDTL	7
1,2 Équations de VON MISES	9
1,3 Équations en $Z(x, \Psi)$ et en $T(x, \Psi)$	10
1,4 Méthodes de calcul utilisées auparavant	11
1,41 Équation de l'impulsion longitudinale	11
1,42 Équation de l'énergie (paroi thermiquement isolée)	12
1,43 Équation de l'énergie (température de paroi non uniforme)	13
1,5 Nouveau processus d'intégration	14
CHAPITRE II. - Première approximation	17
2,1 Équation de l'impulsion longitudinale	17
2,11 Intégration de l'équation	17
2,12 Tension de frottement à la paroi	19
2,2 Équation de l'énergie	20
2,21 Intégration de l'équation	20
2,22 Densité de flux de chaleur à la paroi avec température de paroi imposée	24
2,23 Température de paroi avec densité de flux de chaleur imposée ..	25
2,24 Formule du transfert de chaleur	25
2,25 Facteur thermique pariétal de frottement	26
2,26 Température effective locale et coefficient de convection local ..	28
2,27 Température effective moyenne et coefficient de convection moyen	29
CHAPITRE III. — Seconde approximation	31
3,1 Équation de l'impulsion longitudinale	31
3,11 Intégration de l'équation	31

	PAGES
3,12 Développements en séries de $u_1(t_1, \Psi)$ et $Z_1(t_1, \Psi)$	34
3,13 Tension de frottement à la paroi	35
3,2 Équation de l'énergie	36
3,21 Équation sans second membre	36
3,22 Intégration de l'équation sans second membre	37
3,23 Densité de flux de chaleur à la paroi avec température de paroi imposée	40
CHAPITRE IV. — Convection aux nombres de Prandtl élevés	43
4,1 Intégration de l'équation de l'énergie	43
4,2 Densité de flux de chaleur à la paroi et facteur thermique pariétal de frottement	45
4,3 Coefficient de convection local	46
4,4 Coefficient de convection moyen	47
CHAPITRE V. — Application au cas particulier où $u_e = cx^m$	49
5,1 Coefficient de frottement	50
5,11 Première approximation	50
5,12 Seconde approximation	52
5,2 Facteur thermique pariétal de frottement	55
5,21 Première approximation	55
5,22 Nombres de Prandtl élevés	56
5,3 Coefficient de convection local lorsque $\theta_p - \theta_t = bx^l$	57
5,31 Première approximation	57
5,32 Seconde approximation	62
5,33 Nombres de Prandtl élevés	65
5,4 Coefficient de convection moyen lorsque $\theta_p - \theta_t = bx^l$	68
5,41 Première approximation	68
5,42 Seconde approximation	69
5,43 Nombres de Prandtl élevés	69
CONCLUSION DE LA PREMIÈRE PARTIE	70

DEUXIÈME PARTIE

OBSTACLE BIDIMENSIONNEL OU DE RÉVOLUTION (Propriétés physiques variables)

INTRODUCTION	73
CHAPITRE VI. — Équations générales	75
6,1 Équations de PRANDTL	75
6,2 Équations de VON MISES	76

	PAGES
6,3 Équation simplifiée de l'impulsion	77
6,4 Équation simplifiée de l'énergie	79
CHAPITRE VII. — Étude de la nouvelle transformation	83
7,1 Formules de transformation	83
7,2 Paroi thermiquement isolée	83
7,3 Paroi à température uniforme	86
CHAPITRE VIII. — Application au cas où $u_e^* = c' x^{*m'}$ avec θ_p uniforme et $\mathcal{Q}$ égal à 1	87
8,1 Calculs de COHEN et RESHOTKO	87
8,2 Application de la nouvelle transformation	89
CHAPITRE IX. — Convection sur un obstacle de révolution à température de paroi uniforme	93
9,1 Transformation de MANGLER	93
9,2 Densité de flux de chaleur à la paroi	93
CONCLUSION DE LA DEUXIÈME PARTIE	96
CONCLUSION GÉNÉRALE	97
PLANCHES	99
BIBLIOGRAPHIE	109

NOTATIONS UTILISÉES

x	Abscisse curviligne prise le long d'un profil ou d'un méridien.
y	Ordonnée prise perpendiculairement à la paroi.
t	Variable auxiliaire.
U	Valeur absolue de la vitesse.
u	Composante de la vitesse le long de l'axe des x .
v	Composante de la vitesse le long de l'axe des y .
θ	Température absolue.
a	Célérité du son.
$M = U/a$	Nombre de Mach.
ρ	Masse volumique.
Ψ	Fonction de courant.
μ	Viscosité.
$\nu = \mu/\rho$	Viscosité cinématique.
τ	Tension de frottement.
λ	Coefficient de conductibilité thermique.
c_p	Chaleur spécifique à pression constante par unité de masse.
γ	Rapport des chaleurs spécifiques.
h	Enthalpie massique.
Φ_p	Densité de flux de chaleur à la paroi.
Φ_m	Densité moyenne de flux de chaleur.
θ_f	Température de frottement.
θ_{fm}	Température moyenne de frottement.
θ_{eff}	Température effective locale.
θ_{eff}	Température effective moyenne.
p	Pression statique (également variable utilisée dans la transformation de CARSON).
$\mathcal{P}$	Nombre de Prandtl.
r	Facteur thermique pariétal de frottement (également rayon).
r_c	Facteur thermique pariétal de convection local.
r_{cm}	Facteur thermique pariétal de convection moyen.
r_h	Facteur enthalpique pariétal de frottement.
α	Coefficient de convection local.
α_m	Coefficient de convection moyen.
$R_x = \frac{U_e x}{\nu_e}$	Nombre de Reynolds rapporté à U_e et à x .
$C_f = \frac{2\tau_p}{\rho_e U_e^2}$	Coefficient de frottement local.
$N_x = \frac{\alpha x}{\lambda_e}$	Nombre de Nusselt local rapporté à x .
$N_{xm} = \frac{\alpha_m x}{\lambda_e}$	Nombre de Nusselt moyen rapporté à x .

INDICES INFÉRIEURS

e	Écoulement extérieur à la couche limite.
p	Conditions à la paroi.
t	Conditions au point d'arrêt.
r	Grandeurs de référence.
f	Conditions à la paroi thermiquement isolée.
x	Conditions à l'infini amont.
1.....	Première approximation.
2.....	Deuxième approximation.

INDICES SUPÉRIEURS

$()^*$	Grandeurs transformées par la transformation de la deuxième partie.
$(\sim)$	Grandeurs transformées par la transformation de COHEN et RESHOTKO.
$(\overline{ })$	Grandeurs correspondant à l'équation de l'énergie sans second membre.
$(\widehat{ })$	Grandeurs transformées par la transformation de MANGLER.

N. B. — Les chiffres entre crochets correspondent aux références dont la liste est à la fin de l'ouvrage.

PREMIÈRE PARTIE

OBSTACLE BIDIMENSIONNEL
(Propriétés physiques constantes)

INTRODUCTION

Nous étudierons ici l'écoulement laminaire permanent d'un fluide visqueux et la convection forcée autour d'un obstacle bidimensionnel, que nous traiterons par la méthode de la couche limite.

Nous supposerons dans cette première partie que la vitesse extérieure U_∞ et la différence entre la température de paroi θ_p et la température extérieure θ_∞ sont suffisamment faibles, pour que l'on puisse considérer comme constantes la viscosité μ , la masse volumique ρ , la conductibilité thermique λ et la chaleur spécifique à pression constante c_p du fluide.

Ces hypothèses, malgré leur aspect restrictif, permettent d'étudier le frottement et la convection dans les liquides en se limitant à des flux de chaleur faibles. D'autre part, dans le cas des gaz, on verra dans la deuxième partie que l'on peut ramener les problèmes des écoulements à grande vitesse, où presque toutes les propriétés physiques varient, à des problèmes d'écoulement de fluides à propriétés physiques constantes.

Les équations de la couche limite sont des équations aux dérivées partielles non linéaires qui n'ont été intégrées numériquement que dans des cas particuliers. Divers auteurs ont essayé de donner des solutions analytiques dans le cas général, mais au prix de simplifications dans les termes des équations.

Nous exposerons les différentes méthodes utilisées et nous introduirons une nouvelle méthode de résolution approchée. Les résultats de cette méthode seront appliqués aux cas particuliers dont on connaît les solutions exactes, afin de juger de la convergence numérique des deux premières approximations.

ÉQUATIONS GÉNÉRALES

1,1

ÉQUATIONS DE PRANDTL

Nous définirons chaque point dans l'écoulement autour d'un obstacle bidimensionnel, fini ou semi-infini, à l'aide de ses coordonnées curvilignes : x sera l'abscisse curviligne prise à partir du point d'arrêt et y sera l'ordonnée prise le long d'une normale au profil de l'obstacle (fig. 1).

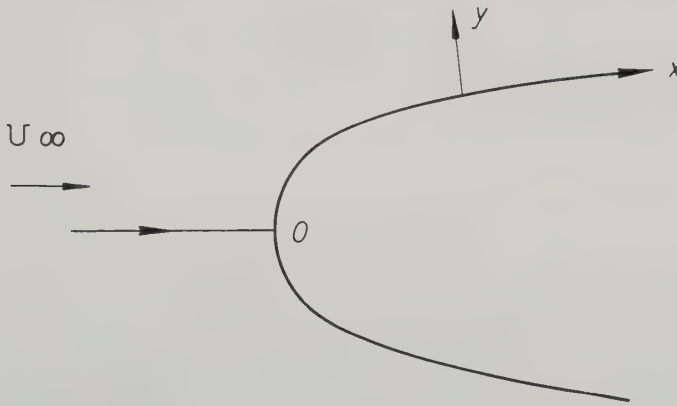


Fig.1.

PRANDTL le premier a montré par des considérations d'ordre de grandeur que les équations de NAVIER auxquelles obéit l'écoulement d'un fluide visqueux pouvaient se simplifier lorsque le quotient du produit de la vitesse à l'infini amont U_∞ par la dimension caractéristique de l'obstacle, et de la viscosité cinématique ν était suffisamment élevé.

On pourra trouver dans la référence [1], par exemple, comment sont obtenues les équations de la couche limite, *lorsque la courbure du profil n'est pas trop élevée*. L'équation de conservation du débit qui lie entre elles les composantes u et v de la vitesse U suivant les axes curvilignes des x et des y , reste inchangée.

$$(1,1) \quad \boxed{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0}.$$

L'équation de conservation de l'impulsion longitudinale devient :

$$(1,2) \quad u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Le premier terme du membre de droite correspond au gradient de pression longitudinal et le second aux efforts dus à la viscosité.

L'équation de conservation de l'impulsion normale se réduit à :

$$(1,3) \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0.$$

L'équation de conservation de l'énergie dans un écoulement isoénergétique s'écrit alors :

$$(1,4) \quad u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\lambda}{\rho c_p} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{u}{\rho c_p} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{v}{c_p} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2.$$

Le membre de gauche correspond à l'enthalpie apportée par convection. Le membre de droite est composé de trois termes : le premier correspond à la chaleur apportée par conductibilité, le second au travail pour vaincre le gradient de pression longitudinal, et le troisième à l'échauffement dû au frottement interne. *On appellera échauffement cinétique la somme des deux derniers termes.*

D'autre part, les composantes longitudinale u et normale v de la vitesse ainsi que la température statique θ obéissent aux conditions aux limites suivantes :

$$(1,5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{y \rightarrow 0} u(x, y) = 0, \\ \lim_{y \rightarrow 0} v(x, y) = 0, \\ \lim_{y \rightarrow 0} \theta(x, y) = \theta_p(x); \end{array} \right.$$

$$(1,6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{y \rightarrow \infty} u(x, y) = u_e(x), \\ \lim_{y \rightarrow \infty} \theta(x, y) = \theta_e(x), \end{array} \right.$$

θ_p est la température de la paroi. Les conditions (1,5) correspondent, d'une part, au cas où il n'y a ni soufflage ni aspiration à la paroi, d'autre part, au cas où il n'y a ni glissement ni saut de température à la paroi, c'est-à-dire où la masse volumique ρ n'est pas trop faible.

u_e et θ_e sont respectivement les valeurs que prendraient à la paroi la vitesse et la température statique dans un écoulement de même vitesse à l'infini amont autour du même obstacle, si la viscosité tendait vers 0, le nombre de Prandtl $\mathcal{P} = \mu c_p / \lambda$ restant constant. L'écoulement obéit alors aux équations d'EULER. Pour simplifier le langage, nous utiliserons dans cet exposé l'expression souvent employée : « à l'extérieur de la couche limite », pour désigner les grandeurs pariétales dans l'écoulement fictif à viscosité nulle.

Les équations (1,2) et (1,4) peuvent se mettre sous une forme plus simple en remarquant :

— d'une part, que :

$$(1,7) \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dp_e}{dx},$$

p_e étant la pression statique à l'extérieur de la couche limite; la relation de BERNOULLI donne :

$$(1,8) \quad \frac{dp_e}{dx} = -\rho u_e \frac{du_e}{dx};$$

— d'autre part, que l'écoulement fictif étant isoénergétique comme l'écoulement réel, la température d'arrêt :

$$(1,9) \quad \theta_t = \theta_e + \frac{u_e^2}{2c_p}$$

est constante à l'extérieur de la couche limite; on aura donc :

$$(1,10) \quad c_p \frac{d\theta_e}{dx} = -u_e \frac{du_e}{dx}.$$

Les équations (1,2) et (1,4) deviennent alors :

$$(1,11) \quad u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = u_e \frac{du_e}{dx} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2};$$

$$(1,12) \quad u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} = u \frac{d\theta_e}{dx} + \frac{\lambda}{\rho c_p} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{v}{c_p} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2.$$

1,2

ÉQUATIONS DE VON MISES

Nous nous limiterons au cas de l'écoulement dans le quadrant $x > 0$ et $y > 0$, qui correspondra, par exemple, à l'extrados. L'écoulement sur l'intrados se traitera de la même façon après avoir changé de signe l'abscisse curviligne x .

Les trois équations de PRANDTL (1,1), (1,11) et (1,12) auxquelles obéissent les trois fonctions u , v et θ peuvent se ramener à deux équations en utilisant la transformation imaginée par VON MISES [2]. Elle consiste à utiliser, comme variables indépendantes, l'abscisse x et la fonction de courant Ψ définie par les relations :

$$(1,13) \quad u = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad \text{et} \quad v = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial x},$$

et telle que $\Psi = 0$ lorsque $y = 0$. On a donc :

$$(1,14) \quad \Psi = \int_0^y \rho u dy.$$

L'équation de continuité est alors automatiquement satisfaite. Le jacobien de la transformation est :

$$(1,15) \quad \frac{D(x, \Psi)}{D(x, y)} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \rho u.$$

Il y aura donc correspondance biunivoque entre le quadrant $x > 0$ et $\Psi > 0$ et le quadrant $x > 0$ et $y > 0$, si u est toujours positif, c'est-à-dire si l'on exclut le demi-axe des Ψ positifs.

On tire, de la définition (1,13), les relations suivantes entre les opérateurs de dérivation partielle :

$$(1,16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)_y = \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)_{\Psi} - \rho v \left(\frac{\partial}{\partial \Psi} \right)_x, \\ \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)_x = \rho u \left(\frac{\partial}{\partial \Psi} \right)_x. \end{array} \right.$$

L'opérateur de dérivation particulière $u (\partial / \partial x)_y + v (\partial / \partial y)_x$ des équations (1,11) et (1,12) est remplacé par l'opérateur de dérivation partielle $(\partial / \partial x)_{\Psi}$, ce qui traduit le fait que Ψ est constant le long d'une ligne de courant.

Les équations (1,11) et (1,12) deviennent, en sous-entendant les indices de dérivation partielle :

$$(1,17) \quad u \frac{\partial u}{\partial x} - u_e \frac{du_e}{dx} - \mu \rho u \frac{\partial}{\partial \Psi} \left(u \frac{\partial u}{\partial \Psi} \right) = 0 ;$$

$$(1,18) \quad u \frac{\partial \theta}{\partial x} - u \frac{d\theta_e}{dx} - \frac{\mu \rho u}{\mathcal{F}} \cdot \frac{\partial}{\partial \Psi} \left(u \frac{\partial \theta}{\partial \Psi} \right) = \frac{\mu \rho}{c_p} u^2 \left(\frac{\partial u}{\partial \Psi} \right)^2.$$

La composante longitudinale u de la vitesse et la température statique θ obéissent aux conditions aux limites suivantes, qui se déduisent de (1,5) et (1,6) :

$$(1,19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{\Psi \rightarrow 0} u(x, \Psi) = 0, \\ \lim_{\Psi \rightarrow 0} \theta(x, \Psi) = \theta_p(x) ; \end{array} \right.$$

$$(1,20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{\Psi \rightarrow \infty} u(x, \Psi) = u_e(x), \\ \lim_{\Psi \rightarrow \infty} \theta(x, \Psi) = \theta_e(x). \end{array} \right.$$

Nous imposerons, en outre, les conditions initiales :

$$(1,21) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} u(x, \Psi) = \lim_{x \rightarrow 0} u_e(x), \\ \lim_{x \rightarrow 0} \theta(x, \Psi) = \lim_{x \rightarrow 0} \theta_e(x). \end{array} \right.$$

1,3 ÉQUATIONS EN $Z(x, \Psi)$ ET EN $T(x, \Psi)$

Prenons comme variables dépendantes :

$$(1,22) \quad Z(x, \Psi) = u_e^2(x) - u^2(x, \Psi)$$

et :

$$(1,23) \quad T(x, \Psi) = \theta(x, \Psi) - \theta_e(x).$$

Introduisons Z dans l'équation (1,17). Le terme proportionnel au gradient de pression n'apparaît plus explicitement et l'équation devient :

$$(1,24) \quad \boxed{\frac{\partial Z}{\partial x} - \mu_p u \frac{\partial^2 Z}{\partial \Psi^2} = 0}$$

avec les conditions aux limites :

$$(1,25) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} Z(x, \Psi) = 0, \\ \lim_{\Psi \rightarrow 0} Z(x, \Psi) = u_e^2(x), \\ \lim_{\Psi \rightarrow \infty} Z(x, \Psi) = 0. \end{array} \right.$$

Introduisons Z et T dans l'équation (1,18). Le terme du travail de compression n'y apparaît plus explicitement et on peut l'écrire, en divisant par u :

$$(1,26) \quad \boxed{\frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\mu_p}{g} \cdot \frac{\partial}{\partial \Psi} \left(u \frac{\partial T}{\partial \Psi} \right) = - \frac{\mu_p}{2c_p} \cdot \frac{\partial u}{\partial \Psi} \cdot \frac{\partial Z}{\partial \Psi}}$$

avec les conditions aux limites :

$$(1,27) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} T(x, \Psi) = 0, \\ \lim_{\Psi \rightarrow 0} T(x, \Psi) = \theta_p(x) - \theta_e^-(x) = \theta_p(x) - \theta_t + \frac{u_e^2(x)}{2c_p}, \\ \lim_{\Psi \rightarrow \infty} T(x, \Psi) = 0. \end{array} \right.$$

Si l'on résout les équations (1,24) et (1,26) avec les conditions aux limites (1,25) et (1,27), on obtiendra u et θ sous la forme de fonctions paramétriques de l'ordonnée y , le paramètre étant la fonction de courant Ψ . En effet l'on aura :

$$(1,28) \quad y(x, \Psi) = \int_0^\Psi \frac{d\Psi}{\rho u} = \int_0^\Psi \frac{d\Psi}{\rho \sqrt{u_e^2 - Z}}$$

1,4 MÉTHODES DE CALCUL UTILISÉES AUPARAVANT

Nous allons faire un historique succinct des méthodes d'intégration numérique exactes des équations de la couche limite et des méthodes approchées dans lesquelles on opère une linéarisation des équations.

1,41 Équation de l'impulsion longitudinale.

FALKNER et SKAN [3] ont montré que l'équation aux dérivées partielles (1,11) se ramène, dans le cas particulier où $u_e = cx^m$, à une équation différentielle, grâce à une hypothèse d'affinité des profils de vitesse :

$$(1,29) \quad \frac{u}{u_e} = f'(\beta; \eta) \quad \text{ou} \quad \Psi = \rho \sqrt{\frac{2\nu u_e x}{m+1}} f(\beta; \eta)$$

avec :

$$(1,30) \quad \eta = y \sqrt{\frac{m+1}{2} \cdot \frac{u_e}{\nu x}}$$

et :

$$(1,31) \quad \beta = \frac{2m}{m+1}.$$

L'équation (1,11) devient :

$$(1,32) \quad \boxed{f''' + ff'' + \beta(1 - f'^2) = 0}.$$

La fonction $f(\beta; \eta)$ obéit aux conditions aux limites suivantes :

$$(1,33) \quad f(\beta; 0) = f'(\beta; 0) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\eta \rightarrow \infty} f'(\beta; \eta) = 1.$$

La résolution numérique de l'équation (1,32) a été effectuée par HARTREE [4] à l'aide d'un analyseur différentiel.

LIGHTHILL [5] a exposé, dans l'annexe d'un mémoire très important sur la convection forcée, une méthode d'intégration approchée de l'équation de VON MISES (1,24). Cette méthode consiste à remplacer, dans le terme $\mu \rho u (\partial^2 Z / \partial \Psi^2)$, la vitesse u par le premier terme du développement en puissances de $\Psi^{1/2}$ de la solution $u(x, \Psi) = \sqrt{u_e^2 - Z}$ de l'équation linéarisée. L'intérêt de cette méthode est de pouvoir s'appliquer dans le cas d'une distribution de vitesse extérieure quelconque.

1,42 Équation de l'énergie (paroi thermiquement isolée).

Lorsque $u_e = cx^m$, l'équation aux dérivées partielles (1,12) se réduit à une équation différentielle, grâce à une hypothèse d'affinité des profils de température :

$$(1,34) \quad g(\beta; \mathcal{T}; \eta) = \frac{2c_p(\theta - \theta_e)}{u_e^2}.$$

On aura :

$$(1,35) \quad \boxed{g'' + \mathcal{T}fg' - 2\beta\mathcal{T}f'g - 2\mathcal{T}f'^2 = 0},$$

avec les conditions aux limites :

$$(1,36) \quad g'(\beta; \mathcal{T}; 0) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\eta \rightarrow \infty} g(\beta; \mathcal{T}; \eta) = 0.$$

ECKERT et DREWITZ [6] ont résolu l'équation (1,35) avec les conditions (1,36) et ont calculé la température de paroi, appelée alors température de frottement θ_f , pour différentes valeurs de m . Le facteur thermique pariétal de frottement est alors $r(m) = g(\beta; \mathcal{F}; 0)$.

1,43 Équation de l'énergie (température de paroi non uniforme).

Le cas d'une distribution de température de paroi de la forme $\theta_p - \theta_f = bx^l$ a été étudié pour la plaque plane par CHAPMAN et RUBESIN [7] et dans le cas où $u_e = cx^m$ par TIFFORD et CHU [8].

On posera :

$$(1,37) \quad \theta(x; \eta) = \theta_t + \frac{u_e^2}{2c_p} [g(\beta; \mathcal{F}; \eta) - 1] + bx^l Y_l(\beta; \mathcal{F}; \eta).$$

La fonction $Y_l(\beta; \mathcal{F}; \eta)$ doit satisfaire à l'équation différentielle :

$$(1,38) \quad \boxed{Y_l'' + \mathcal{F} Y_l' - \frac{2l}{m+1} \mathcal{F}' Y_l = 0},$$

avec les conditions aux limites :

$$(1,39) \quad Y_l(\beta; \mathcal{F}; 0) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{\eta \rightarrow \infty} Y_l(\beta; \mathcal{F}; \eta) = 0.$$

TIFFORD et CHU ont pu ainsi calculer les coefficients de convection locaux pour différentes valeurs de m et l .

Comme l'équation de l'énergie (1,12) est une équation linéaire en θ , on peut alors résoudre par superposition le cas où la distribution de température de paroi peut se mettre sous la forme :

$$\theta_p - \theta_f = \sum_1^N b_r x^{l_r}.$$

Le cas de la température de paroi uniforme avait d'abord été traité par ECKERT [9] qui avait résolu l'équation (1,38) pour $l = 0$ et rapporté le coefficient de convection à $\theta_p - \theta_t$, ceci n'étant valable que si l'échauffement cinétique est négligeable.

TIFFORD et CHU ont posé par contre :

$$(1,40) \quad \theta_p - \theta_f = \theta_p - \theta_t + \frac{[1 - r(m)]}{2c_p} c^2 x^{2m}.$$

expression qui est de la forme $\sum_1^2 b_r x^{l_r}$. Ils en ont déduit que la densité de flux de cha-

leur à la paroi est proportionnelle à $\theta_p - \theta_{eff}$, θ_{eff} étant la *température effective locale*, telle que :

$$(1,41) \quad \theta_{eff} = \theta_t + (\theta_f - \theta_t) \frac{Y'_{2m}(\beta; \mathfrak{F}; 0)}{Y'_0(\beta; \mathfrak{F}; 0)}.$$

FAGE et FALKNER [10] ont introduit une simplification de l'équation (1,38) en y remplaçant $f(\eta)$ par le premier terme du développement en puissances de η de la solution exacte de l'équation de l'impulsion (1,32).

LIGHTHILL, dans le mémoire déjà cité au paragraphe 1,41 a utilisé l'équation de l'énergie (1,26) sous la forme de von MISES en négligeant l'échauffement cinétique. Il a remplacé, dans l'équation de l'énergie, u par le premier terme du développement en puissances de $\Psi^{1/2}$ de la *solution de l'équation exacte* (1,17) de l'impulsion longitudinale.

L'intérêt fondamental de ce mémoire est l'obtention d'une formule donnant la densité de flux de chaleur à la paroi dans le cas de distributions quelconques de la vitesse extérieure et de la température de paroi. L'avantage sur les calculs de FAGE et FALKNER est que l'on ne se limite plus à des expressions de u_e et de $\theta_p - \theta_t$ en puissances de x .

Le fait d'avoir négligé tous les termes d'ordre supérieur à $\Psi^{1/2}$ conduit évidemment à de légères différences avec les valeurs exactes. Comme on le verra plus loin, ceci s'interprète en remarquant que la théorie de LIGHTHILL n'est valable que pour des nombres de Prandtl élevés. Plusieurs auteurs, dont TIFFORD [11], LIEPMANN [12] et SPALDING [13], ont cherché à améliorer la formule de LIGHTHILL à l'aide de considérations semi-empiriques.

Il nous a semblé nécessaire de reprendre, sur des bases qui nous paraissent plus sûres, l'idée directrice d'une linéarisation des équations de la couche limite laminaire en la considérant comme une première approximation. D'autre part, à la différence de LIGHTHILL, nous avons gardé le terme dû à l'échauffement cinétique.

Nous devons faire remarquer que les résultats qui sont exposés dans le deuxième chapitre avaient été obtenus d'une manière différente dans la référence [14].

1,5 NOUVEAU PROCESSUS D'INTÉGRATION

1,51. Nous allons exposer à présent une nouvelle méthode d'intégration approchée des équations (1,24) et (1,26).

On utilisera, pour l'équation de l'impulsion longitudinale, le processus d'itération suivant :

$$(1,42) \quad \left[\frac{\partial Z_1}{\partial x} - \mu \rho u_1^{(0)} \frac{\partial^2 Z_1}{\partial \Psi^2} = 0 \right],$$

et, lorsque $j \geq 1$:

$$(1,43) \quad \left[\frac{\partial Z_{j+1}}{\partial x} - \mu \rho u_j^{(0)} \frac{\partial^2 Z_{j+1}}{\partial \Psi^2} = \mu \rho (u_j - u_j^{(0)}) \frac{\partial^2 Z_j}{\partial \Psi^2} \right],$$

où $u_j^{(0)}(x, \Psi)$ est une expression approchée de $u_j(x, \Psi)$ donnée au paragraphe 1,53.

Les solutions des équations (1,42) et (1,43) devront obéir aux conditions aux limites :

$$(1,44) \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} Z_j(x, \Psi) = 0, \\ \lim_{\Psi \rightarrow 0} Z_j(x, \Psi) = u_e^2(x), \\ \lim_{\Psi \rightarrow \infty} Z_j(x, \Psi) = 0. \end{cases}$$

L'expression paramétrique de l'ordonnée, dans le cas de l'approximation d'ordre j , sera :

$$(1,45) \quad y_j(x, \Psi) = \int_0^\Psi \frac{d\Psi}{\rho u_j(x, \Psi)}.$$

1,52. L'équation de l'énergie peut être intégrée grâce à un processus d'itération analogue :

$$(1,46) \quad \boxed{\frac{\partial T_1}{\partial x} - \frac{\mu \rho}{\mathcal{F}} \cdot \frac{\partial}{\partial \Psi} \left(u_1^{(0)} \frac{\partial T_1}{\partial \Psi} \right) = - \frac{\mu \rho}{2c_p} \cdot \frac{\partial u_1^{(0)}}{\partial \Psi} \cdot \frac{\partial Z_1}{\partial \Psi}},$$

et, lorsque $j \geq 1$:

$$(1,47) \quad \boxed{\begin{aligned} \frac{\partial T_{j+1}}{\partial x} - \frac{\mu \rho}{\mathcal{F}} \cdot \frac{\partial}{\partial \Psi} \left(u_j^{(0)} \frac{\partial T_{j+1}}{\partial \Psi} \right) &= \frac{\mu \rho}{\mathcal{F}} \frac{\partial}{\partial \Psi} \left[\left(u_j - u_j^{(0)} \right) \frac{\partial T_j}{\partial \Psi} \right] \\ &\quad - \frac{\mu \rho}{2c_p} \cdot \frac{\partial u_j^{(0)}}{\partial \Psi} \cdot \frac{\partial Z_{j+1}}{\partial \Psi} + \frac{\mu \rho}{2c_p} \cdot \frac{\partial (u_j - u_j^{(0)})}{\partial \Psi} \cdot \frac{\partial Z_j}{\partial \Psi}. \end{aligned}}$$

Les solutions des équations (1,46) et (1,47) devront obéir aux conditions aux limites :

$$(1,48) \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} T_j(x, \Psi) = 0, \\ \lim_{\Psi \rightarrow 0} T_j(x, \Psi) = \theta_p(x) - \theta_t + \frac{u_e^2(x)}{2c_p}, \\ \lim_{\Psi \rightarrow \infty} T_j(x, \Psi) = 0. \end{cases}$$

1,53. Dans le cas de l'approximation d'ordre $j + 1$, nous choisirons la fonction $u_j^{(0)}(x, \Psi)$ égale au premier terme du développement en puissances de $\Psi^{1/2}$ de $u_j(x, \Psi)$.

Nous aurons donc :

$$(1,49) \quad u_j^{(0)}(x, \Psi) = \Psi^{1/2} \left\{ 2 \lim_{\Psi \rightarrow 0} \left(u_j \frac{\partial u_j}{\partial \Psi} \right) \right\}^{1/2}.$$

La tension de frottement à la paroi, dans le cas de l'approximation d'ordre j , est, par définition :

$$(1,50) \quad \tau_{pj} = \mu \lim_{y_j \rightarrow 0} \left(\frac{\partial u_j}{\partial y_j} \right) = \mu \rho \lim_{\Psi \rightarrow 0} \left(u_j \frac{\partial u_j}{\partial \Psi} \right).$$

En composant (1,49) et (1,50), on obtient :

$$(1,51) \quad u_j^{(0)}(x, \Psi) = \left(\frac{2\tau_{pj}}{\mu\varphi} \right)^{1/2} \Psi^{1/2}.$$

Nous ne traiterons ici que les deux premières approximations, car, comme on le verra au cinquième chapitre, la deuxième approximation fournit déjà des résultats voisins des valeurs exactes.

PREMIÈRE APPROXIMATION

2,1 ÉQUATION DE L'IMPULSION LONGITUDINALE

2,11 Intégration de l'équation.

Dans le cas de la première approximation, nous avons :

$$(2,1) \quad \frac{\partial Z_1}{\partial x} - \mu_p u_1^{(0)} \frac{\partial^2 Z_1}{\partial \Psi^2} = 0,$$

avec :

$$(2,2) \quad u_1^{(0)}(x, \Psi) = \left(\frac{2 \tau_{p1}}{\mu_p} \right)^{1/2} \Psi^{1/2},$$

et les conditions aux limites :

$$(2,3) \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} Z_1(x, \Psi) = 0, \\ \lim_{\Psi \rightarrow 0} Z_1(x, \Psi) = u_e^2(x), \\ \lim_{\Psi \rightarrow \infty} Z_1(x, \Psi) = 0. \end{cases}$$

Remplaçons dans l'équation (2,1), $u_1^{(0)}$ par l'expression (2,2) :

$$(2,4) \quad \frac{\partial Z_1}{\partial x} - (2 \mu_p \tau_{p1})^{1/2} \Psi^{1/2} \frac{\partial^2 Z_1}{\partial \Psi^2} = 0.$$

L'équation (2,4) est identique à celle de l'annexe du mémoire de Lighthill, dont nous avons déjà parlé au paragraphe 1,41. Nous allons suivre dans ce paragraphe la méthode d'intégration de Lighthill. Faisons le changement de variable :

$$(2,5) \quad \boxed{t_1 = \int_0^x (2 \mu_p \tau_{p1})^{1/2} dx}.$$

L'équation (2,4) devient :

$$(2,6) \quad \frac{\partial Z_1}{\partial t_1} - \Psi^{1/2} \frac{\partial^2 Z_1}{\partial \Psi^2} = 0.$$

La correspondance entre le quadrant ($x > 0$ et $\Psi > 0$) et le quadrant ($t_1 > 0$ et $\Psi > 0$) est biunivoque, si l'on exclut le domaine où $\tau_{p1}(x)$ est négatif.

Nous utiliserons la transformation par rapport à la variable t_1 , définie par l'intégrale de CARSON :

$$(2,7) \quad \varphi(p) = p \int_0^\infty e^{-pt_1} f(t_1) dt_1 \subset f(t_1).$$

Soit $\mathfrak{J}_1(p, \Psi)$ l'image de $Z_1(t_1, \Psi)$; l'on aura, grâce à la première condition (2,3) :

$$(2,8) \quad \frac{\partial Z_1(t_1, \Psi)}{\partial t_1} \supset p \mathfrak{J}_1(p, \Psi).$$

L'équation à laquelle obéit l'image $\mathfrak{J}_1(p, \Psi)$ sera donc :

$$(2,9) \quad \boxed{p \mathfrak{J}_1 - \Psi^{1/2} \frac{\partial^2 \mathfrak{J}_1}{\partial \Psi^2} = 0},$$

avec les conditions aux limites :

$$(2,10) \quad \begin{cases} \lim_{\Psi \rightarrow 0} \mathfrak{J}_1(p, \Psi) = \zeta_1(p), \\ \lim_{\Psi \rightarrow \infty} \mathfrak{J}_1(p, \Psi) = 0, \end{cases}$$

$\zeta_1(p)$ étant l'image de la fonction $u_e(t_1)$.

Faisons le changement de variables :

$$(2,11) \quad \begin{cases} z = \frac{4}{3} p^{1/2} \Psi^{3/4}, \\ \mathfrak{U}_1(p, z) = z^{-2/3} \mathfrak{J}_1(p, \Psi). \end{cases}$$

On aura :

$$(2,12) \quad \Psi = \left(\frac{3}{4}\right)^{4/3} p^{-2/3} z^{4/3}$$

et :

$$(2,13) \quad \frac{\partial}{\partial \Psi} = \left(\frac{4}{3}\right)^{1/3} p^{2/3} z^{-1/3} \frac{\partial}{\partial z}.$$

Après avoir divisé par $pz^{2/3}$ et changé de signe l'équation (2,9), on obtient une équation de BESSEL :

$$(2,14) \quad \frac{\partial^2 \mathfrak{U}_1}{\partial z^2} + \frac{1}{z} \cdot \frac{\partial \mathfrak{U}_1}{\partial z} - \left(1 + \frac{4}{9z^2}\right) \mathfrak{U}_1 = 0.$$

Les conditions aux limites (2,10) deviennent :

$$(2,15) \quad \begin{cases} \lim_{z \rightarrow 0} z^{2/3} \mathfrak{U}_1(p, z) = \zeta_1(p), \\ \lim_{z \rightarrow \infty} z^{2/3} \mathfrak{U}_1(p, z) = 0. \end{cases}$$

L'intégrale générale de l'équation (2,14) s'exprime à l'aide de fonctions de BESSEL modifiées de première espèce :

$$(2,16) \quad \mathcal{U}_1(p, z) = a_1^-(p) I_{-2/3}(z) + a_1^+(p) I_{2/3}(z).$$

Les coefficients $a_1^-(p)$ et $a_1^+(p)$ sont déterminés par les conditions aux limites (2,15) :

$$(2,17) \quad \begin{cases} a_1^-(p) = 2^{-2/3} \Gamma(1/3) \zeta_1(p), \\ a_1^+(p) = -a_1^-(p) = -2^{-2/3} \Gamma(1/3) \zeta_1(p). \end{cases}$$

La solution de l'équation (2,14) avec les conditions (2,15) s'exprime donc à l'aide d'une fonction de BESSEL modifiée de seconde espèce :

$$(2,18) \quad \mathcal{U}_1(p, z) = \frac{3^{1/2}}{2^{2/3} \pi} \Gamma(1/3) \zeta_1(p) K_{2/3}(z).$$

La solution de l'équation (2,9) avec les conditions (2,10) sera donc :

$$(2,19) \quad \boxed{\tilde{\mathcal{Z}}_1(p, \Psi) = \frac{2^{2/3} \Gamma(1/3)}{3^{1/6} \pi} p^{1/3} \zeta_1(p) \Psi^{1/2} K_{2/3} \left[\frac{4}{3} p^{1/2} \Psi^{3/4} \right]}.$$

2,12 Tension de frottement à la paroi.

Le développement limité de $Z_1(t_1, \Psi)$, au voisinage de $\Psi = 0$ est :

$$(2,20) \quad Z_1(t_1, \Psi) = u_c^2(t_1) - \frac{2\tau_{p_1}(t_1)}{\rho_1 \mu} \Psi + 0(\Psi^{3/2}).$$

En prenant les images terme à terme, on obtiendra le développement limité de $\tilde{\mathcal{Z}}_1(p, \Psi)$ au voisinage de $\Psi = 0$:

$$(2,21) \quad \tilde{\mathcal{Z}}_1(p, \Psi) = \zeta_1(p) - 2\xi_1(p) \Psi + 0(\Psi^{3/2})$$

avec :

$$(2,22) \quad \xi_1(p) = \frac{\tau_{p_1}(t_1)}{\rho_1 \mu}.$$

Le développement limité de $\tilde{\mathcal{Z}}_1(p, z)$ en puissances de $z^{2/3}$ est obtenu à partir de (2,11) :

$$(2,23) \quad \tilde{\mathcal{Z}}_1(p, z) = \zeta_1(p) - \frac{3^{4/3}}{2^{5/3}} p^{-2/3} \xi_1(p) z^{4/3} + 0(z^2).$$

Le développement en série de puissances de $z^{2/3}$ de l'expression (2,19) est :

$$(2,24) \quad \tilde{\mathcal{Z}}_1(p, z) = 2^{-2/3} \Gamma(1/3) \zeta_1(p) z^{2/3} \left\{ \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{-\frac{2}{3}+2r}}{r! \Gamma\left(\frac{1}{3}+r\right)} - \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{-\frac{2}{3}+2r}}{r! \Gamma\left(\frac{5}{3}+r\right)} \right\}.$$

Si l'on égale les termes en $z^{4/3}$ dans les expressions (2,23) et (2,24), on obtiendra :

$$(2,25) \quad \boxed{\zeta_1(p) = \frac{2^{2/3} 3^{1/3} \Gamma(2/3)}{\Gamma(1/3)} p^{-2/3} \xi_1(p)}.$$

L'original du produit de deux fonctions de p est obtenu grâce à la formule du produit de BOREL, qui s'écrit, lorsque l'on utilise l'intégrale de CARSON :

$$(2,26) \quad \frac{1}{p} \varphi_1(p) \varphi_2(p) \subset \int_0^t f_1(t-t') f_2(t') dt',$$

$f_1(t)$ et $f_2(t)$ étant les originaux des fonctions $\varphi_1(p)$ et $\varphi_2(p)$.

On tire de la relation (2,25), la relation suivante :

$$(2,27) \quad \int_0^{t_1} (t_1 - t'_1)^{-1/3} \tau_{p_1}(t'_1) dt'_1 = \frac{\mu p \Gamma(1/3)}{2^{2/3} 3^{1/3}} u_e^2(t_1).$$

La tension de frottement à la paroi $\tau_{p_1}(x)$ sera donc solution de l'équation intégrale avec second membre :

$$(2,28) \quad \boxed{\int_0^x \left(\int_{x'}^x [\tau_{p_1}(x'')]^{1/2} dx'' \right)^{-1.3} [\tau_{p_1}(x')]^{3/2} dx' = \frac{(\mu p)^{2/3} \Gamma(1/3)}{2 \cdot 3^{1/3}} u_e^2(x)}.$$

Cette équation ne peut être résolue facilement que lorsque $u_e(x)$ est proportionnel à une puissance de x comme on le verra au chapitre V.

Par contre, le problème inverse, consistant à trouver la distribution de la vitesse extérieure connaissant la distribution de la tension de frottement à la paroi, serait plus facile à résoudre.

Signalons que ILLINGWORTH [15], en développant τ_{p_1} et u_e^2 en séries de puissances fractionnaires de t_1 , a pu calculer les trois premiers termes non nuls du développement en série de TAYLOR de $\tau_{p_1}(x)$, pour un obstacle arrondi symétrique à incidence nulle.

2,2 ÉQUATION DE L'ÉNERGIE

2,21 Intégration de l'équation.

Dans le cas de la première approximation, nous avons :

$$(2,29) \quad \boxed{\frac{\partial T_1}{\partial x} - \frac{\mu p}{g} \cdot \frac{\partial}{\partial \Psi} \left(u_1^{(0)} \frac{\partial T_1}{\partial \Psi} \right) = - \frac{\mu p}{2c_p} \cdot \frac{\partial u_1^{(0)}}{\partial \Psi} \cdot \frac{\partial Z_1}{\partial \Psi}}.$$

avec les conditions aux limites :

$$(2,30) \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} T_1(x, \Psi) = 0, \\ \lim_{\Psi \rightarrow 0} T_1(x, \Psi) = \theta_p(x) - \theta_t + \frac{u_e^2(x)}{2c_p}, \\ \lim_{\Psi \rightarrow x} T_1(x, \Psi) = 0. \end{cases}$$

Remplaçons, dans l'équation (2,29), $u_1^{(0)}$ par son expression (2,2), on aura :

$$(2,31) \quad \frac{\partial T_1}{\partial x} - \frac{(2\mu\varphi\tau_{p_1})^{1/2}}{\mathfrak{F}} \cdot \frac{\partial}{\partial \Psi} \left(\Psi^{1/2} \frac{\partial T_1}{\partial \Psi} \right) = - \frac{(2\mu\varphi\tau_{p_1})^{1/2}}{4c_p} \Psi^{-1/2} \frac{\partial Z_1}{\partial \Psi}.$$

Faisons le changement de variable (2,5), on aura :

$$(2,32) \quad \frac{\partial T_1}{\partial t_1} - \frac{1}{\mathfrak{F}} \cdot \frac{\partial}{\partial \Psi} \left(\Psi^{1/2} \frac{\partial T_1}{\partial \Psi} \right) = - \frac{\Psi^{-1/2}}{4c_p} \cdot \frac{\partial Z_1}{\partial \Psi}.$$

Soit $\mathfrak{T}_1(p, \Psi)$ l'image de la fonction $T_1(t_1, \Psi)$; l'équation (2,32) devient, en tenant compte de la première condition (2,30) :

$$(2,33) \quad \boxed{p \mathfrak{T}_1 - \frac{1}{\mathfrak{F}} \cdot \frac{\partial}{\partial \Psi} \left(\Psi^{1/2} \frac{\partial \mathfrak{T}_1}{\partial \Psi} \right) = - \frac{\Psi^{-1/2}}{4c_p} \cdot \frac{\partial \mathfrak{Z}_1}{\partial \Psi}},$$

avec les conditions aux limites :

$$(2,34) \quad \begin{cases} \lim_{\Psi \rightarrow 0} \mathfrak{T}_1(p, \Psi) = \delta_1(p) + \frac{\zeta_1(p)}{2c_p}, \\ \lim_{\Psi \rightarrow \infty} \mathfrak{T}_1(p, \Psi) = 0, \end{cases}$$

$\delta_1(p)$ étant l'image de la fonction : $\theta_p(t_1) = \theta_t$.

Faisons le changement de variables :

$$(2,35) \quad \begin{cases} s = \mathfrak{F}^{1/2} z = \frac{4}{3} (p \mathfrak{F})^{1/2} \Psi^{3/4}, \\ \mathfrak{U}_1(p, s) = s^{-1/3} \mathfrak{T}_1(p, \Psi). \end{cases}$$

On aura :

$$(2,36) \quad \Psi = \left(\frac{3}{4} \right)^{4/3} (p \mathfrak{F})^{-2/3} s^{4/3}$$

et :

$$(2,37) \quad \frac{\partial}{\partial \Psi} = \left(\frac{4}{3} \right)^{1/3} (p \mathfrak{F})^{2/3} s^{-1/3} \frac{\partial}{\partial s}.$$

Après avoir divisé par $ps^{1/3}$ et changé de signe l'équation (2,33), on obtient une équation de BESSEL avec second membre :

$$(2,38) \quad \frac{\partial^2 \mathfrak{U}_1}{\partial s^2} + \frac{1}{s} \cdot \frac{\partial \mathfrak{U}_1}{\partial s} - \left(1 + \frac{1}{9s^2} \right) \mathfrak{U}_1 = H_1(p, s)$$

avec :

$$(2,39) \quad H_1(p, s) = -\frac{\mathfrak{F}^{1,2}}{3c_p} s^{-4/3} \frac{\partial}{\partial z} [z^{2/3} \mathcal{U}_1(p, z)].$$

Remplaçons $\mathcal{U}_1(p, z)$ par son expression (2,18) et utilisons les relations de récurrence des fonctions de BESSEL modifiées de seconde espèce :

$$(2,40) \quad H_1(p, s) = -\frac{2^{1/3}}{3^{1/2}} \Gamma(1/3) \frac{\mathfrak{F}^{1,6}}{\pi s^{2/3}} \cdot \frac{\zeta_1(p)}{2c_p} \cdot K_{1/3}(s \mathfrak{F}^{-1/2}).$$

Les conditions aux limites auxquelles devra obéir $\mathcal{V}_1(p, s)$ seront :

$$(2,41) \quad \begin{cases} \lim_{s \rightarrow 0} s^{1/3} \mathcal{V}_1(p, s) = \delta_1(p) + \frac{\zeta_1(p)}{2c_p}, \\ \lim_{s \rightarrow \infty} s^{1/3} \mathcal{V}_1(p, s) = 0. \end{cases}$$

Nous utiliserons la méthode de la variation des constantes pour intégrer l'équation (2,38). L'intégrale générale est donc de la forme :

$$(2,42) \quad \mathcal{V}_1(p, s) = B_1^-(p, s) I_{-1/3}(s) + B_1^+(p, s) I_{1/3}(s)$$

avec :

$$(2,43) \quad \begin{cases} B_1^-(p, s) = b_1^-(p) - \frac{\pi}{3^{1/2}} \int_0^s s H_1(p, s) I_{1/3}(s) ds, \\ B_1^+(p, s) = b_1^+(p) + \frac{\pi}{3^{1/2}} \int_0^s s H_1(p, s) I_{-1/3}(s) ds. \end{cases}$$

La première condition du système (2,41) nous impose :

$$(2,44) \quad b_1^-(p) = 2^{-1/3} \Gamma(2/3) \left[\delta_1(p) + \frac{\zeta_1(p)}{2c_p} \right].$$

Pour pouvoir satisfaire à la deuxième condition du système (2,41), il faut, d'après les développements asymptotiques de $I_{-1/3}(s)$ et de $I_{1/3}(s)$, que :

$$(2,45) \quad \lim_{s \rightarrow \infty} B_1^-(p, s) + \lim_{s \rightarrow \infty} B_1^+(p, s) = 0,$$

donc :

$$(2,46) \quad b_1^+(p) = -2^{-1/3} \Gamma(2/3) \left[\delta_1(p) + \frac{\zeta_1(p)}{2c_p} \right] - \int_0^\infty s H_1(p, s) K_{1/3}(s) ds$$

avec :

$$(2,47) \quad \int_0^\infty s H_1(p, s) K_{1/3}(s) ds = -\frac{2^{1/3} \Gamma(1/3)}{3^{1/2} \pi} \mathfrak{F}^{1,6} \frac{\zeta_1(p)}{2c_p} \\ \times \int_0^\infty s^{1/3} K_{1/3}(s \mathfrak{F}^{-1/2}) K_{1/3}(s) ds.$$

Cette dernière intégrale est de la forme :

$$(2,48) \quad I(\alpha, \beta) = \int_0^\infty s^\lambda K_\mu'(\alpha s) K_\nu(\beta s) ds,$$

qui existe lorsque $\mu + \nu < \lambda + 1$; elle s'exprime à l'aide d'une fonction hypergéométrique :

$$(2,49) \quad I(\alpha, \beta) = \frac{G(\lambda, \mu, \nu)}{\alpha^{1+\lambda-\nu} \beta^\nu} {}_2F_1\left(\frac{1+\lambda-\mu-\nu}{2}, \frac{1+\lambda+\mu-\nu}{2}; 1+\lambda; 1-\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)$$

avec :

$$(2,50) \quad G(\lambda, \mu, \nu) = \frac{2^{\lambda-2} \Gamma\left(\frac{1+\lambda-\mu-\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1+\lambda-\mu+\nu}{2}\right)}{\Gamma(1+\lambda)} \\ \times \Gamma\left(\frac{1+\lambda+\mu+\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1+\lambda+\mu-\nu}{2}\right).$$

Dans notre cas : $\lambda = 1/3, \mu = \nu = 1/3$.

Si nous posons : $\alpha = \mathfrak{F}^{-1/2}$ et $\beta = 1$:

$$(2,51) \quad \int_0^\infty s H_1(p, s) K_{1/3}(s) ds = -2^{-1/3} \Gamma(2/3) \mathfrak{F}^{2/3} \\ \times \frac{\zeta_1(p)}{2c_p} {}_2F_1\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}; \frac{4}{3}; 1-\mathfrak{F}\right).$$

Si nous posons : $\alpha = 1$ et $\beta = \mathfrak{F}^{-1/2}$:

$$(2,52) \quad \int_0^\infty s H_1(p, s) K_{1/3}(s) ds = -2^{-1/3} \Gamma(2/3) \mathfrak{F}^{1/3} \\ \times \frac{\zeta_1(p)}{2c_p} {}_2F_1\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}; \frac{4}{3}; \frac{\mathfrak{F}-1}{\mathfrak{F}}\right).$$

Nous aurons enfin :

$$(2,53) \quad b_1^+(p) = -2^{-1/3} \Gamma(2/3) \left[\delta_1(p) + (1-r(\mathfrak{F})) \frac{\zeta_1(p)}{2c_p} \right],$$

où $r(\mathfrak{F})$ est une fonction du nombre de Prandtl qui est donnée, soit par la formule :

$$(2,54) \quad r(\mathfrak{F}) = \mathfrak{F}^{2/3} {}_2F_1\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}; \frac{4}{3}; 1-\mathfrak{F}\right),$$

la série hypergéométrique étant convergente lorsque $0 < \mathfrak{F} < 2$, soit par :

$$(2,55) \quad r(\mathfrak{F}) = \mathfrak{F}^{1/3} {}_2F_1\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}; \frac{4}{3}; \frac{\mathfrak{F}-1}{\mathfrak{F}}\right),$$

la série hypergéométrique étant convergente lorsque $\frac{1}{2} < \mathfrak{F} < \infty$. La solution de l'équation (2,33) avec les conditions (2,34) s'écrira donc :

$$(2,56) \quad \begin{aligned} \mathfrak{T}_1(p, \Psi) = & \left\{ 2^{-1/3} \Gamma(2/3) \left[\delta_1(p) + \frac{\zeta_1(p)}{2c_p} \right] + \frac{2^{1/3}}{3} \Gamma(1/3) \mathfrak{F}^{1/6} \right. \\ & \left. \frac{\zeta_1(p)}{2c_p} \int_0^s s^{1/3} K_{1/3}(s \mathfrak{F}^{-1/2}) I_{1/3}(s) ds \right\} s^{1/3} I_{-1/3}(s) - \left\{ 2^{-1/3} \right. \\ & \times \Gamma(2/3) \left[\delta_1(p) + (1 - r(\mathfrak{F})) \frac{\zeta_1(p)}{2c_p} \right] + \frac{2^{1/3}}{3} \Gamma(1/3) \mathfrak{F}^{1/6} \frac{\zeta_1(p)}{2c_p} \\ & \left. \times \int_0^s s^{1/3} K_{1/3}(s \mathfrak{F}^{-1/2}) I_{1/3}(s) ds \right\} s^{1/3} I_{1/3}(s) \end{aligned}$$

où s est donnée par la première formule du système (2,35).

2,22 Densité de flux de chaleur à la paroi avec température de paroi imposée.

Le développement limité de $T_1(t_1, \Psi)$ au voisinage de $\Psi = 0$ est :

$$(2,57) \quad T_1(t_1, \Psi) = \theta_p(t_1) - \theta_e(t_1) - \frac{\mathfrak{F}}{c_p} \Phi_{p_1}(t_1) \left(\frac{2}{[\mu \rho \tau_{p_1}(t_1)]} \right)^{1/2} \Psi^{1/2} + 0(\Psi),$$

$\Phi_{p_1} = -\lambda (\partial \theta_1 / \partial y_1)_p$ étant la densité de flux de chaleur à la paroi dans le cas de la première approximation.

En prenant les images terme à terme, le développement limité de $\mathfrak{T}_1(p, \Psi)$ au voisinage de $\Psi = 0$ sera :

$$(2,58) \quad \mathfrak{T}_1(p, \Psi) = \delta_1(p) + \frac{\zeta_1(p)}{2c_p} - \frac{2^{1/2} \mathfrak{F}}{c_p} \chi_1(p) \Psi^{1/2} + 0(\Psi),$$

avec :

$$(2,59) \quad \chi_1(p) \subset \frac{\Phi_{p_1}(t_1)}{[\mu \rho \tau_{p_1}(t_1)]^{1/2}}.$$

Le développement limité de $\mathfrak{T}_1(p, s)$ en puissances de $s^{2/3}$ sera obtenu à partir de (2,35) :

$$(2,60) \quad \mathfrak{T}_1(p, s) = \delta_1(p) + \frac{\zeta_1(p)}{2c_p} - \frac{3^{2/3}}{2^{5/6}} \cdot \frac{\mathfrak{F}^{2/3}}{c_p} p^{-1/3} \chi_1(p) s^{2/3} + 0(s^{4/3}).$$

Le coefficient de $s^{2/3}$ dans le développement en série de puissances de $s^{2/3}$ de l'expression (2,56) de $\mathfrak{T}_1(p, s)$ est :

$$(2,61) \quad \lim_{s \rightarrow 0} s^{-2/3} \left[\mathfrak{T}_1(p, s) - \delta_1(p) - \frac{\zeta_1(p)}{2c_p} \right] = \frac{b_1^+(p)}{2^{1/3} \Gamma(4/3)}.$$

Égalons-le au coefficient correspondant du développement (2,60) en remplaçant $b_1^+(p)$ par son expression (2,53), on obtient :

$$(2,62) \quad \chi_1(p) = c_p \frac{2^{1/6} 3^{1/3} \Gamma(2/3)}{\Gamma(1/3)} \mathcal{F}^{-2/3} p^{1/3} \left[\delta_1(p) + (1 - r(\mathcal{F})) \frac{\zeta_1(p)}{2 c_p} \right].$$

2,23 Température de paroi avec densité de flux de chaleur à la paroi imposée.

Lorsque la densité de flux de chaleur à la paroi est imposée, la relation (2,62) s'inverse facilement :

$$(2,63) \quad \delta_1(p) = [r(\mathcal{F}) - 1] \frac{\zeta_1(p)}{2 c_p} + \frac{\Gamma(1/3)}{2^{1/6} 3^{1/3} \Gamma(2/3)} \cdot \frac{\mathcal{F}^{2/3}}{c_p} p^{-1/3} \chi_1(p).$$

La relation qui lie les originaux est donc :

$$(2,64) \quad \theta_{p_1}(t_1) - \theta_t = [r(\mathcal{F}) - 1] \frac{u_e^2(t_1)}{2 c_p} + \frac{\mathcal{F}^{2/3}}{2^{1/6} 3^{1/3} \Gamma(2/3) c_p (\mu \rho)^{1/2}} \times \int_0^{t_1} (t_1 - t'_1)^{-2/3} \frac{\Phi_p(t'_1)}{[\tau_{p_1}(t'_1)]^{1/2}} dt'_1,$$

d'où :

$$(2,65) \quad \theta_{p_1}(x) - \theta_t = [r(\mathcal{F}) - 1] \frac{u_e^2(x)}{2 c_p} + \frac{\mathcal{F}^{2/3}}{3^{1/3} \Gamma(2/3) c_p (\mu \rho)^{1/3}} \times \int_0^x \left(\int_{x'}^x [\tau_{p_1}(x'')]^{1/2} dx'' \right)^{-2/3} \Phi_p(x') dx'.$$

En particulier, lorsque *la paroi est thermiquement isolée*, $\Phi_p = 0$. La température de paroi est dite alors *température de frottement* ; elle est donnée par :

$$(2,66) \quad \theta_{f_1} = \theta_t + [r(\mathcal{F}) - 1] \frac{u_e^2}{2 c_p} = \theta_e + r(\mathcal{F}) \frac{u_e^2}{2 c_p}.$$

2,24 Formule du transfert de chaleur.

Revenons au cas où la *température de paroi est imposée*. Si l'on tient compte de (2,66), la densité de flux de chaleur à la paroi est donnée par une intégrale de STIELTJES :

$$(2,67) \quad \Phi_{p_1}(t_1) = c_p \frac{2^{1/6} 3^{1/3}}{\Gamma(1/3)} (\mu \rho)^{1/2} \mathcal{F}^{-2/3} [\tau_{p_1}(t_1)]^{1/2} \times \int_0^{t_1} (t_1 - t'_1)^{-1/3} d[\theta_p(t'_1) - \theta_{f_1}(t'_1)],$$

d'où :

$$(2,68) \quad \Phi_{p_1}(x) = c_p \frac{3^{1/3}}{\Gamma(1/3)} (\mu \rho)^{1/3} \mathcal{F}^{-2/3} [\tau_{p_1}(x)]^{1/2} \times \int_0^x \left(\int_{x'}^x [\tau_{p_1}(x'')]^{1/2} dx'' \right)^{-1/3} d[\theta_p(x') - \theta_{f_1}(x')].$$

La densité moyenne de flux de chaleur prise de 0 à x est, par définition :

$$(2,69) \quad \Phi_m(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \Phi_p(x) dx.$$

Dans le cas de la première approximation, nous avons donc :

$$(2,70) \quad x(t_1) \Phi_{m_1}(t_1) = \int_0^{t_1} \frac{\Phi_{p_1}(t_1)}{[2\mu\rho\tau_{p_1}(t_1)]^{1/2}} dt_1 \supset \frac{\chi_1(p)}{2^{1/2}p}.$$

On a donc :

$$(2,71) \quad \Phi_{m_1}(t_1) = c_p \frac{3^{4/3} \mathfrak{F}^{-2/3}}{2^{4/3} \Gamma(1/3)} \cdot \frac{1}{x(t_1)} \int_0^{t_1} (t_1 - t'_1)^{2/3} d[\theta_p(t'_1) - \theta_{f_1}(t'_1)].$$

La densité moyenne de flux de chaleur est donnée aussi par une intégrale de STIELTJES :

$$(2,72) \quad \Phi_{m_1}(x) = c_p \frac{3^{4/3} (\mu\rho)^{1/3}}{2 \Gamma(1/3)} \cdot \frac{\mathfrak{F}^{-2/3}}{x} \int_0^x \left(\int_{x'}^x [\tau_{p_1}(x'')]^{1/2} dx'' \right)^{2/3} d[\theta_p(x') - \theta_{f_1}(x')].$$

2,25 Facteur thermique pariétal de frottement.

Le facteur thermique pariétal de frottement est par définition :

$$(2,73) \quad r = \frac{\theta_f - \theta_e}{\theta_t - \theta_e}.$$

Dans le cas de la première approximation, on voit d'après (2,66) que r_1 est égal à la fonction $r(\mathfrak{F})$ exprimée par les formules (2,54) et (2,55). Le facteur thermique pariétal de frottement est donc indépendant du gradient de pression et ne dépend que du nombre de Prandtl.

Lorsque $\mathfrak{F} = 1$, les dérivées première, seconde et troisième de $r(\mathfrak{F})$ sont égales respectivement à $1/2$, $-2/7$ et $3/7$; tandis que l'expression empirique $\mathfrak{F}^{1/2}$ utilisée généralement a ses trois premières dérivées égales respectivement à $1/2$, $-1/4$ et $3/8$.

On sait que les fonctions hypergéométriques s'expriment sous la forme d'une intégrale définie. Nous aurons donc, lorsque $0 < \mathfrak{F} < 1$:

$$(2,74) \quad r_1 = \frac{\mathfrak{F}^{2/3}}{3(1-\mathfrak{F})^{2/3}} B\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}; 1-\mathfrak{F}\right),$$

et, lorsque $1 < \mathfrak{F} < \infty$:

$$(2,75) \quad r_1 = \frac{\mathfrak{F}}{3(\mathfrak{F}-1)^{2/3}} B\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}; \frac{\mathfrak{F}-1}{\mathfrak{F}}\right);$$

$$B(\alpha, \beta; x) = \int_0^x t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt$$

est la fonction eulérienne incomplète de première espèce.

Lorsque les nombres de Prandtl sont faibles, nous tirerons de (2,74) le développement suivant :

$$(2,76) \quad r_1 = \frac{\mathfrak{P}^{2/3}}{(1 - \mathfrak{P})^{1/3}} \left[\frac{\Gamma^3(1/3)}{2\pi\sqrt{3}} - \mathfrak{P}^{1/3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(n + \frac{2}{3}\right)}{(3n+1)\Gamma(2/3)} \cdot \frac{\mathfrak{P}^n}{n!} \right].$$

Si $\mathfrak{P}$ tend vers zéro, nous obtenons la formule asymptotique :

$$(2,77) \quad r_1 \cong \frac{\Gamma^3(1/3)}{2\pi\sqrt{3}} \mathfrak{P}^{2/3} = 1,7666 \mathfrak{P}^{2/3}.$$

Lorsque les nombres de Prandtl sont élevés, nous tirerons de (2,75) le développement suivant :

$$(2,78) \quad r_1 = \frac{\mathfrak{P}^{2/3}}{(\mathfrak{P} - 1)^{1/3}} \left[\frac{\Gamma^3(1/3)}{2\pi\sqrt{3}} - \frac{1}{\mathfrak{P}^{1/3}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(n + \frac{2}{3}\right)}{(3n+1)\Gamma(2/3)} \cdot \frac{\mathfrak{P}^{-n}}{n!} \right].$$

Si $\mathfrak{P}$ croît indéfiniment, nous obtenons la formule asymptotique :

$$(2,79) \quad r_1 \cong \frac{\Gamma^3(1/3)}{2\pi\sqrt{3}} \mathfrak{P}^{1/3} = 1,7666 \mathfrak{P}^{1/3}.$$

Dans le cas de la plaque plane, E. POHLHAUSEN [16] a obtenu l'expression suivante du facteur thermique pariétal de frottement :

$$(2,80) \quad r = 2 \mathfrak{P} \int_0^{\infty} [f''(0; \eta)]^{\mathfrak{P}} \left(\int_0^{\eta} [f''(0; \eta')]^{2-\mathfrak{P}} d\eta' \right) d\eta.$$

La fonction $f(0; \eta)$ est la fonction définie au paragraphe 1,41, dans le cas où $m = 0$.

Nous avons porté sur les tableaux I et I *bis*, les valeurs de r_1 pour différentes valeurs de $\mathfrak{P}$ ainsi que les valeurs exactes calculées par E. POHLHAUSEN et par SPARROW et GREGG [17], à partir de la formule (2,80) :

TABLEAU I

$\mathfrak{P}$	0,006	0,01	0,03
SPARROW ET GREGG	0,07279	0,09434	0,1653
r_1	0,05244	0,07223	0,1419
$0,942 \mathfrak{P}^{1/2} + 0,194 \mathfrak{P}$	0,07272	0,09436	0,1659

TABLEAU I bis

φ	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	7	10	15
E. POHLHAUSEN	0,770	0,835	0,895	0,950	1,000	1,050	2,515	2,965	3,535
r_1	0,771	0,835	0,894	0,948	1,000	1,049	2,478	2,888	3,424
$\mathcal{F}^{1/2}$	0,775	0,837	0,894	0,949	1,000	1,049	2,646	3,162	3,873

Les résultats fournis par la première approximation sont plus voisins, aux nombres de Prandtl élevés, des valeurs exactes que la formule empirique $\mathcal{F}^{1/2}$. Par contre, aux nombres de Prandtl faibles, r_1 est plus éloigné des valeurs exactes que la formule asymptotique $0,9242 \mathcal{F}^{1/2} + 0,194 \mathcal{F}$ de MORGAN, PIPKIN et WARNER [18].

Sur la planche 1, nous avons porté $\log r_1$ en fonction de $\log \mathcal{F}$, ainsi que quelques points correspondant aux valeurs exactes de E. POHLHAUSEN.

2,26 Température effective locale et coefficient de convection local.

Supposons que la distribution $\theta_p(x)$ de la température de paroi soit de la forme $\theta_t + a P(x)$.

On voit facilement que les formules (2,67) et (2,68) peuvent se mettre sous la forme :

$$(2,81) \quad \Phi_{p_1} = \alpha_1 (\theta_p - \theta_{eff_1}).$$

Le terme α_1 , appelé *coefficient de convection local* ne dépend pas du paramètre a . Le terme θ_{eff_1} est appelé *température effective locale* et la différence $\theta_{eff_1} - \theta_t$ ne dépend pas du paramètre a .

Nous aurons, d'une part :

$$(2,82) \quad \alpha_1(t_1) = c_p \frac{2^{1/6} 3^{1/3}}{\Gamma(1/3)} (\mu\rho)^{1/2} \mathcal{F}^{-2/3} \frac{[\tau_{p_1}(t_1)]^{1/2}}{\theta_p(t_1) - \theta_t} \int_0^{t_1} (t_1 - t'_1)^{-1/3} d[\theta_p(t'_1) - \theta_t]$$

ou :

$$(2,83) \quad \alpha_1(x) = c_p \frac{3^{1/3}}{\Gamma(1/3)} (\mu\rho)^{1/2} \mathcal{F}^{-2/3} \frac{[\tau_{p_1}(x)]^{1/2}}{\theta_p(x) - \theta_t} \times \int_0^x \left(\int_{t'_1}^x [\tau_{p_1}(x'')]^{1/2} dx'' \right)^{-1/3} d[\theta_p(x') - \theta_t]$$

et, d'autre part :

$$(2,84) \quad \theta_{eff_1}(t_1) = \theta_t + \frac{(r_1 - 1)}{2 c_p} [\theta_p(t_1) - \theta_t] \times \frac{\int_0^{t_1} (t_1 - t'_1)^{-1/3} d[u_e^2(t'_1)]}{\int_0^{t_1} (t_1 - t'_1)^{-1/3} d[\theta_p(t'_1) - \theta_t]},$$

ou :

$$(2,85) \quad \theta_{eff_1}(x) = \theta_t + \frac{(r_1 - 1)}{2c_p} [\theta_p(x) - \theta_t] \times \frac{\int_0^x \left(\int_{x'}^x [\tau_{p_1}(x'')]^{1/2} dx'' \right)^{-1/3} d[u_e^2(x')]}{\int_0^x \left(\int_{x'}^x [\tau_{p_1}(x'')]^{1/2} dx'' \right)^{-1/3} d[\theta_p(x') - \theta_t]}$$

On peut interpréter la température effective locale comme étant la température de paroi, pour laquelle Φ_{p_1} s'annule au point considéré, lorsque l'on fait varier le paramètre a .

On définira, en outre, un facteur thermique pariétal de convection local :

$$(2,86) \quad r_{c_1} = \frac{\theta_{eff_1} - \theta_e}{\theta_t - \theta_e}.$$

Si $\mathcal{F} = 1$, $\theta_{eff_1} = \theta_t$ et $r_{c_1} = 1$, quelle que soit la distribution de la vitesse $u_e(x)$.

D'autre part, dans le cas de la plaque plane avec température de paroi uniforme, $\theta_{eff_1} = \theta_{f_1}$ et $r_{c_1} = r_1$, quelle que soit la valeur du nombre de Prandtl. L'ancienne formule rapportant le coefficient de convection à la différence entre la température de paroi et la température de frottement [19], reste valable.

2,27 Température effective moyenne et coefficient de convection moyen.

On peut également définir un coefficient de convection moyen α_{m_1} et une température effective moyenne θ_{eff_1} , tels que :

$$(2,87) \quad \Phi_{m_1} = \alpha_{m_1} (\theta_p - \theta_{eff_1}).$$

Nous aurons, d'une part :

$$(2,88) \quad \alpha_{m_1}(t_1) = c_p \frac{3^{4/3}}{2^{4/3} \Gamma(1/3)} \times \frac{\mathcal{F}^{-2/3}}{x(t_1) [\theta_p(t_1) - \theta_t]} \times \int_0^{t_1} (t_1 - t'_1)^{2/3} d[\theta_p(t'_1) - \theta_t],$$

ou :

$$(2,89) \quad \alpha_{m_1}(x) = c_p \frac{3^{4/3} (\mu \rho)^{1/3}}{2 \Gamma(1/3)} \times \frac{\mathcal{F}^{-2/3}}{x [\theta_p(x) - \theta_t]} \times \int_0^x \left(\int_{x'}^x [\tau_{p_1}(x'')]^{1/2} dx'' \right)^{2/3} d[\theta_p(x') - \theta_t],$$

et, d'autre part :

$$(2,90) \quad \theta_{eff_1}(t_1) = \theta_t + \frac{(r_1 - 1)}{2c_p} [\theta_p(t_1) - \theta_t] \times \frac{\int_0^{t_1} (t_1 - t'_1)^{2/3} d[u_e^2(t'_1)]}{\int_0^{t_1} (t_1 - t'_1)^{2/3} d[\theta_p(t'_1) - \theta_t]},$$

ou :

$$(2,91) \quad \theta_{\overline{eff}_1}(x) = \theta_t + \frac{(r_1 - 1)}{2 c_p} [\theta_p(x) - \theta_t] \\ \times \frac{\int_0^x \left(\int_{x'}^x [\tau_{p_1}(x'')]^{1/2} dx'' \right)^{2/3} d[u_e^2(x')]}{\int_0^x \left(\int_{x'}^x [\tau_{p_1}(x'')]^{1/2} dx'' \right)^{2/3} d[\theta_p(x') - \theta_t]}$$

La température effective moyenne en un point d'abscisse x est la *température de paroi*, telle que Φ_{m_1} correspondant au segment Ox s'annule, lorsque l'on fait varier le paramètre a de la loi de température de paroi.

Ainsi, lorsque la température de paroi est uniforme, la température effective moyenne en un point d'abscisse x est la température d'équilibre que prendrait l'obstacle s'il était parfaitement conducteur jusqu'à cette abscisse et parfaitement isolant après.

Dans le cas général, on définira aussi un facteur thermique pariétal de convection moyen :

$$(2,92) \quad r_{cm_1} = \frac{\theta_{\overline{eff}_1} - \theta_e}{\theta_t - \theta_e}.$$

SECONDE APPROXIMATION

3,1 ÉQUATION DE L'IMPULSION LONGITUDINALE

3,11 Intégration de l'équation.

Dans le cas de la seconde approximation, l'équation de l'impulsion longitudinale est :

$$(3,1) \quad \frac{\partial Z_2}{\partial x} - \mu \rho u_1^{(0)} \frac{\partial^2 Z_2}{\partial \Psi^2} = \mu \rho (u_1 - u_1^{(0)}) \frac{\partial^2 Z_1}{\partial \Psi^2}.$$

La solution de l'équation (3,1) obéira aux conditions aux limites :

$$(3,2) \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} Z_2(x, \Psi) = 0, \\ \lim_{\Psi \rightarrow 0} Z_2(x, \Psi) = u_e^2(x), \\ \lim_{\Psi \rightarrow \infty} Z_2(x, \Psi) = 0. \end{cases}$$

Faisons le changement de variable :

$$(3,3) \quad t_1 = \int_0^x (2 \rho \mu \tau_{p1})^{1/2} dx.$$

On peut calculer le développement :

$$(3,4) \quad u_1(t_1, \Psi) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t_1) \Psi^{n/2}.$$

L'équation (3,1) deviendra après avoir éliminé $\partial^2 Z_1 / \partial \Psi^2$ grâce à l'équation (2,6) :

$$(3,5) \quad \frac{\partial Z_2}{\partial t_1} - \Psi^{1/2} \frac{\partial^2 Z_2}{\partial \Psi^2} = \frac{\partial Z_1}{\partial t_1} \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n(t_1) \Psi^{n/2}$$

avec :

$$(3,6) \quad \gamma_n(t_1) = \frac{a_{n+1}(t_1)}{a_1(t_1)}.$$

L'image du produit de deux fonctions peut être obtenue à l'aide du théorème du produit établi par POLI [20].

$$\text{Soit :} \quad f_1(t) \supset \varphi_1(p) \quad \text{et} \quad f_2(t) \supset \varphi_2(p);$$

on démontre que :

$$(3,7) \quad \frac{1}{t} f_1(t) \varphi_2(t) \supset p \int_p^\infty \varphi_1(\lambda) f_2(\lambda - p) \frac{d\lambda}{\lambda}.$$

Soit $c_n(t)$ l'original de $p \gamma_n(p)$, on aura :

$$(3,8) \quad \frac{\partial Z_1}{\partial t_1} \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n(t_1) \Psi^{n/2} \supset p \sum_{n=1}^{\infty} \Psi^{n/2} \int_p^\infty c_n(\lambda - p) \mathfrak{Z}_1(\lambda, \Psi) d\lambda.$$

L'équation (3,5) est transformée en :

$$(3,9) \quad \boxed{p \mathfrak{Z}_2 - \Psi^{1/2} \frac{\partial^2 \mathfrak{Z}_2}{\partial \Psi^2} = p \sum_{n=1}^{\infty} \Psi^{n/2} \int_p^\infty c_n(\lambda - p) \mathfrak{Z}_1(\lambda, \Psi) d\lambda},$$

avec les conditions aux limites :

$$(3,10) \quad \begin{cases} \lim_{\Psi \rightarrow 0} \mathfrak{Z}_2(p, \Psi) = \zeta_1(p), \\ \lim_{\Psi \rightarrow \infty} \mathfrak{Z}_2(p, \Psi) = 0. \end{cases}$$

Faisons le changement de variables donné par le système (2,11) et posons :

$$(3,11) \quad \mathfrak{U}_2(p, z) = z^{-2/3} \mathfrak{Z}_2(p, \Psi).$$

Après avoir divisé par $p z^{2/3}$ et changé de signe l'équation (3,9), l'on obtient :

$$(3,12) \quad \frac{\partial^2 \mathfrak{U}_2}{\partial z^2} + \frac{1}{z} \cdot \frac{\partial \mathfrak{U}_2}{\partial z} - \left(1 + \frac{4}{9z^2}\right) \mathfrak{U}_2 = G_2(p, z)$$

avec :

$$(3,13) \quad G_2(p, z) = -p^{-1/3} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2n}{3}} p^{-\frac{n}{3}} z^{\frac{2n}{3}} \times \int_p^\infty \lambda^{1/3} c_n(\lambda - p) \mathfrak{U}_1\left(\lambda, z \frac{\lambda^{1/2}}{p^{1/2}}\right) d\lambda.$$

Remplaçons $\mathfrak{U}_1(p, z)$ par son expression (2,18) :

$$(3,14) \quad G_2(p, z) = -\frac{3^{1/2}}{2^{2/3}\pi} \Gamma(1/3) p^{-1/3} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2n}{3}} p^{-\frac{n}{3}} \times z^{\frac{2n}{3}} \int_p^\infty \lambda^{1/3} \zeta_1(\lambda) c_n(\lambda - p) K_{2/3}\left(z \frac{\lambda^{1/2}}{p^{1/2}}\right) d\lambda.$$

La solution $\mathcal{U}_2(p, z)$ doit d'autre part obéir aux conditions aux limites suivantes :

$$(3,15) \quad \begin{cases} \lim_{z \rightarrow 0} z^{2/3} \mathcal{U}_2(p, z) = \zeta_1(p), \\ \lim_{z \rightarrow \infty} z^{2/3} \mathcal{U}_2(p, z) = 0. \end{cases}$$

L'intégrale générale de l'équation (3,11) est de la forme :

$$(3,16) \quad \mathcal{U}_2(p, z) = A_2^-(p, z) I_{-2/3}(z) + A_2^+(p, z) I_{2/3}(z).$$

La méthode de variation des constantes nous fournit les expressions de $A_2^-(p, z)$ et $A_2^+(p, z)$:

$$(3,17) \quad \begin{cases} A_2^-(p, z) = a_2^-(p) - \frac{\pi}{3^{1/2}} \int_0^z z G_2(p, z) I_{2/3}(z) dz, \\ A_2^+(p, z) = a_2^+(p) + \frac{\pi}{3^{1/2}} \int_0^z z G_2(p, z) I_{-2/3}(z) dz. \end{cases}$$

La première condition du système (3,15) nous donne :

$$(3,18) \quad a_2^-(p) = 2^{-2/3} \Gamma(1/3) \zeta_1(p).$$

La seconde condition du système (3,15) nous impose :

$$(3,19) \quad \lim_{z \rightarrow \infty} A_2^-(p, z) + \lim_{z \rightarrow \infty} A_2^+(p, z) = 0,$$

d'où :

$$(3,20) \quad a_2^+(p) = -2^{-2/3} \Gamma(1/3) \zeta_1(p) - \int_0^\infty z G_2(p, z) K_{2/3}(z) dz.$$

L'intégrale ci-dessus peut s'écrire, en utilisant l'expression (3,14) :

$$(3,21) \quad \int_0^\infty z G_2(p, z) K_{2/3}(z) dz = \frac{3^{1/2}}{2^{2/3} \pi} \Gamma(1/3) p^{-1/3} \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2n}{3}} \\ \times p^{-\frac{n}{3}} \int_0^\infty z^{\frac{2n}{3}+1} K_{2/3}(z) \left\{ \int_p^\infty \lambda^{1/3} \zeta_1(\lambda) c_n(\lambda - p) K_{2/3}\left(z \frac{\lambda^{1/2}}{p^{1/2}}\right) d\lambda \right\} dz.$$

Ces intégrales doubles sont convergentes à cause du comportement à l'infini des fonctions $K_{2/3}$.

Nous pouvons donc intervertir l'ordre des intégrations :

$$(3,22) \quad \int_0^\infty z G_2(p, z) K_{2/3}(z) dz = -\frac{3^{1/2}}{2^{2/3} \pi} \Gamma(1/3) p^{-1/3} \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2n}{3}} p^{-\frac{n}{3}} \\ \times \int_p^\infty \lambda^{1/3} \zeta_1(\lambda) c_n(\lambda - p) \left\{ \int_0^\infty z^{\frac{2n}{3}+1} K_{2/3}\left(z \frac{\lambda^{1/2}}{p^{1/2}}\right) K_{2/3}(z) dz \right\} d\lambda.$$

En utilisant les formules (2,48), (2,49) et (2,50), on aura enfin :

$$(3,23) \quad \int_0^\infty z G_2(p, z) K_{2/3}(z) dz = -\frac{3^{1/2}}{2^{5/3} \pi} \Gamma(1/3) p^{1/3} \\ \times \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2n}{3}} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{3} + \frac{1}{3}\right) \Gamma^2\left(\frac{n}{3} + 1\right) \Gamma\left(\frac{n}{3} + \frac{5}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{2n}{3} + 2\right)} \\ \times \int_p^\infty \lambda^{-\frac{(n+1)}{3}} \zeta_1(\lambda) c_n(\lambda - p) {}_2F_1\left(\frac{n}{3} + \frac{1}{3}, \frac{n}{3} + 1; \frac{2n}{3} + 2; 1 - \frac{p}{\lambda}\right) d\lambda.$$

3,12 Développements en séries de $u_1(t_1, \Psi)$ et de $Z_1(t_1, \Psi)$.

Posons :

$$(3,24) \quad Z_1(t_1, \Psi) = \sum_{n=0}^\infty b_n(t_1) \Psi^{n/2}.$$

On trouve, à l'aide de l'équation (2-6) à laquelle satisfait Z_1 que les coefficients b_n obéissent à la relation de récurrence suivante :

$$(3,25) \quad b_n = \frac{4}{n(n-2)} \cdot \frac{db_{n-3}}{dt_1} \quad (n \geq 3)$$

avec :

$$(3,26) \quad b_0 = u_e^2(t_1), \quad b_1 = 0 \quad \text{et} \quad b_2 = -a_1^2 = -\frac{2\tau_{p_1}(t_1)}{\rho\mu};$$

d'où :

$$(3,27) \quad \left\{ \begin{array}{l} b_{3i} = \frac{2^{2i}}{3^i \cdot i! \prod_{r=1}^i (3r-2)} \cdot \frac{d^i(u_e^2)}{dt_1^i}, \\ b_{3i+1} = 0, \\ b_{3i+2} = -\frac{2^{i+1}}{3^i \cdot i! \prod_{r=1}^i (3r+2)} \cdot \frac{1}{\rho\mu} \cdot \frac{d^i \tau_{p_1}}{dt_1^i}. \end{array} \right.$$

D'après la définition de Z , nous avons :

$$(3,28) \quad \sum_{n=2}^\infty b_n \Psi^{n/2} = -\left(\sum_{n=1}^\infty a_n \Psi^{n/2}\right)^2.$$

Les coefficients $a_n(t_1)$ seront donc donnés par la relation :

$$(3,29) \quad a_n = -\frac{b_{n+1}}{2a_1} - \frac{1}{2a_1} \sum_{p=1}^{n-2} a_{p+1} a_{n-p} \quad (n \geq 3)$$

avec :

$$(3,30) \quad a_2 = -\frac{b_3}{2a_1} = -\frac{1}{3} \left(\frac{2\rho^\mu}{\tau_{p_1}} \right)^{1/2} \cdot \frac{d(u_e^2)}{dt_1}.$$

Les coefficients $\gamma_n(t_1)$ définis par la relation (3,6) obéissent à la relation de récurrence :

$$(3,31) \quad \boxed{\gamma_n = -\frac{b_{n+2}}{2a_1^2} - \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{n-1} \gamma_p \gamma_{n-p}} \quad (n \geq 2)$$

avec :

$$(3,32) \quad \gamma_1(t_1) = -\frac{\rho^\mu}{3\tau_{p_1}} \cdot \frac{d(u_e^2)}{dt_1}.$$

3.13 Tension de frottement à la paroi.

Le développement limité de $\mathfrak{Z}_2(p, \Psi)$ au voisinage de $\Psi = 0$ est :

$$(3,33) \quad \mathfrak{Z}_2(p, \Psi) = \zeta_1(p) - 2\zeta_2(p)\Psi + 0(\Psi^3)$$

avec :

$$(3,34) \quad \zeta_2(p) \subset \frac{\tau_{p_2}(t_1)}{\rho^\mu}.$$

Le développement limité de $\mathfrak{Z}_2(p, z)$ en puissances de $z^{2/3}$ sera donc :

$$(3,35) \quad \mathfrak{Z}_2(p, z) = \zeta_1(p) - \frac{3^{4/3}}{2^{5/3}} p^{-2/3} \zeta_2(p) z^{4/3} + 0(z^2).$$

Si l'on égale les termes en $z^{4/3}$ dans l'expression (3,35) et dans le développement en puissances entières de $z^{2/3}$ de la solution de l'équation (3,9), on obtiendra :

$$(3,36) \quad \zeta_2(p) = -\frac{p^{2/3} a_2^+(p)}{3^{1/3} \Gamma(2/3)}.$$

Remplaçons $a_2^+(p)$ par sa valeur (3,20) en utilisant la formule (3,23), on aura :

$$(3,37) \quad \boxed{\begin{aligned} \zeta_2(p) &= \frac{\Gamma(1/3)}{2^{2/3} 3^{1/3} \Gamma(2/3)} p^{2/3} \zeta_1(p) - \frac{3^{1/6} \Gamma(1/3)}{2^{5/3} \pi \Gamma(2/3)} \\ &\times p \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2n}{3}} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{3} + \frac{1}{3}\right) \Gamma^2\left(\frac{n}{3} + 1\right) \Gamma\left(\frac{n}{3} + \frac{5}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{2n}{3} + 2\right)} \\ &\times \int_p^{\infty} \lambda^{-\frac{(n+1)}{3}} \zeta_1(\lambda) c_n(\lambda - p) {}_2F_1\left(\frac{n}{3} + \frac{1}{3}, \frac{n}{3} + 1; \frac{2n}{3} + 2; 1 - \frac{p}{\lambda}\right) d\lambda. \end{aligned}}$$

Si l'on remplace les fonctions hypergéométriques par leurs développements en séries, l'original de la relation (3,37) sera :

$$(3,38) \quad \tau_{p_1}(t_1) = \frac{1}{2^{2/3} 3^{1/3} \Gamma(2/3)} \int_0^{t_1} (t_1 - t'_1)^{-2/3} d[u_e^2(t'_1)] \\ - \frac{3^{1/6} \Gamma(1/3)}{2^{5/3} \pi \Gamma(2/3)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2n}{3}} \Gamma\left(\frac{n}{3} + 1\right) \Gamma\left(\frac{n}{3} + \frac{5}{3}\right) \\ \times \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n}{3} + 1 + r\right)}{\Gamma\left(\frac{2n}{3} + 2 + r\right)} \gamma_n^{(r)} \int_0^{t_1} (t_1 - t'_1)^{\frac{n}{3} + r - \frac{2}{3}} d[u_e^2(t'_1)] ,$$

où $\gamma_n^{(r)}$ désigne la dérivée d'ordre r de $\gamma_n(t_1)$ par rapport à t_1 ; d'où :

$$(3,39) \quad \tau_{p_1}(x) = \frac{1}{2 \cdot 3^{1/3} \Gamma(2/3) (\rho\mu)^{1/3}} \int_0^x \left(\int_{x'}^x [\tau_{p_1}(x'')]^{1/2} dx'' \right)^{-2/3} d[u_e^2(x')] \\ - \frac{3^{1/6} \Gamma(1/3)}{4 \pi \Gamma(2/3) (\rho\mu)^{1/3}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2n}{3}} (2 \rho\mu)^{n/6} \Gamma\left(\frac{n}{3} + 1\right) \Gamma\left(\frac{n}{3} + \frac{5}{3}\right) \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r (2 \rho\mu)^{r/2}}{r!} \\ \times \frac{\Gamma\left(\frac{n}{3} + 1 + r\right)}{\Gamma\left(\frac{2n}{3} + 2 + r\right)} \gamma_n^{(r)} \int_0^x \left(\int_{x'}^x [\tau_{p_1}(x'')]^{1/2} dx'' \right)^{\frac{n}{3} + r - \frac{2}{3}} d[u_e^2(x')] .$$

3,2

ÉQUATION DE L'ÉNERGIE

3,21 Équation sans second membre.

L'équation complète de l'énergie semble extrêmement difficile à intégrer dans le cas de la seconde approximation. Nous allons pouvoir quand même traiter ce problème en nous appuyant sur un théorème bien connu des équations différentielles linéaires.

En effet, l'équation (1,26) étant linéaire en T , la solution de cette équation peut être considérée comme la somme de la solution générale $\bar{T}$ de l'équation sans second membre :

$$(3,40) \quad \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} - \frac{\mu \rho}{g} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(u \frac{\partial T}{\partial y} \right) = 0$$

et d'une solution particulière de l'équation complète. Nous choisirons comme solution particulière, celle correspondant à $\Phi_p = 0$ tout le long de la paroi.

L'équation sans second membre (3,40) sera dans le cas de la seconde approximation :

$$(3,41) \quad \frac{\partial \bar{T}_2}{\partial x} - \frac{\mu \rho}{\mathcal{F}} \cdot \frac{\partial}{\partial \Psi} \left(u_1^{(0)} \frac{\partial \bar{T}_2}{\partial \Psi} \right) = \frac{\mu \rho}{\mathcal{F}} \cdot \frac{\partial}{\partial \Psi} \left[(u_1 - u_1^{(0)}) \frac{\partial \bar{T}_1}{\partial \Psi} \right],$$

$\bar{T}_1$ étant solution de l'équation :

$$(3,42) \quad \frac{\partial \bar{T}_1}{\partial x} - \frac{\mu \rho}{\mathcal{F}} \cdot \frac{\partial}{\partial \Psi} \left(u_1^{(0)} \frac{\partial \bar{T}_1}{\partial \Psi} \right) = 0.$$

Si l'on tient compte du fait que T_1 et T_2 obéissant aux conditions aux limites (1,48), les fonctions $\bar{T}_1$ et $\bar{T}_2$ devront obéir aux conditions aux limites suivantes ($i = 1$ ou 2) :

$$(3,43) \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} \bar{T}_i(x, \Psi) = 0, \\ \lim_{\Psi \rightarrow 0} \bar{T}_i(x, \Psi) = \theta_p(x) - \theta_{fi}(x), \\ \lim_{\Psi \rightarrow \infty} \bar{T}_i(x, \Psi) = 0, \end{cases}$$

θ_{fi} étant la température de frottement obtenue avec l'approximation d'ordre i .

L'hypothèse simplificatrice que nous utiliserons dans le troisième chapitre consiste à prendre la *température de frottement* θ_{fi} à la place de θ_{fi} .

3,22 Intégration de l'équation sans second membre.

Faisons le changement de variable (3,3) dans l'équation (3,41). Nous aurons :

$$(3,44) \quad \frac{\partial \bar{T}_2}{\partial t_1} - \frac{1}{\mathcal{F}} \frac{\partial}{\partial \Psi} \left(\Psi^{1/2} \frac{\partial \bar{T}_2}{\partial \Psi} \right) = \frac{1}{\mathcal{F}} \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n(t_1) \frac{\partial}{\partial \Psi} \left[\Psi^{\frac{n+1}{2}} \frac{\partial \bar{T}_1}{\partial \Psi} \right],$$

$\bar{T}_1(t_1, \Psi)$ étant solution de l'équation :

$$(3,45) \quad \frac{\partial \bar{T}_1}{\partial t_1} - \frac{1}{\mathcal{F}} \frac{\partial}{\partial \Psi} \left(\Psi^{1/2} \frac{\partial \bar{T}_1}{\partial \Psi} \right) = 0.$$

Soient $\bar{\mathcal{C}}_1(p, \Psi)$ et $\bar{\mathcal{C}}_2(p, \Psi)$ les images de $\bar{T}_1(t_1, \Psi)$ et de $\bar{T}_2(t_1, \Psi)$ dans la transformation de CARSON, elles obéiront aux équations suivantes :

$$(3,46) \quad \begin{cases} p \bar{\mathcal{C}}_1 - \frac{1}{\mathcal{F}} \frac{\partial}{\partial \Psi} \left(\Psi^{1/2} \frac{\partial \bar{\mathcal{C}}_1}{\partial \Psi} \right) = 0, \\ p \bar{\mathcal{C}}_2 - \frac{1}{\mathcal{F}} \frac{\partial}{\partial \Psi} \left(\Psi^{1/2} \frac{\partial \bar{\mathcal{C}}_2}{\partial \Psi} \right) = \frac{p}{\mathcal{F}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \Psi} \left[\Psi^{\frac{n+1}{2}} \int_p^{\infty} \frac{\partial \bar{\mathcal{C}}_1}{\partial \Psi}(\lambda, \Psi) c_n(\lambda - p) \frac{d\lambda}{\lambda} \right] \end{cases}$$

avec les conditions aux limites ($i = 1$ ou 2) :

$$(3,47) \quad \begin{cases} \lim_{\Psi \rightarrow 0} \bar{\mathcal{G}}_i(p, \Psi) = \delta_1(p) + (1 - r_1) \frac{\zeta_1(p)}{2c_p} \\ \lim_{\Psi \rightarrow \infty} \bar{\mathcal{G}}_i(p, \Psi) = 0. \end{cases}$$

On remarquera que la première équation du système (3,46) est identique à l'équation (2,33) en $\mathcal{G}_1(p, \Psi)$, si l'on supprime le second membre. On trouve aisément que :

$$(3,48) \quad \bar{\mathcal{G}}_1(p, \Psi) = s^{1/3} \bar{\mathcal{U}}_1(p, s)$$

avec :

$$(3,49) \quad \bar{\mathcal{U}}_1(p, s) = \frac{3^{1/2} \Gamma(1/3)}{2^{1/3} \pi} \left[\delta_1(p) + (1 - r_1) \frac{\zeta_1(p)}{2c_p} \right] K_{1/3}(s).$$

Posons :

$$(3,50) \quad \bar{\mathcal{U}}_2(p, s) = s^{-1/3} \bar{\mathcal{G}}_2(p, \Psi).$$

Après avoir divisé par $p s^{1/3}$ et changé de signe la deuxième équation du système (3,46), l'on obtient :

$$(3,51) \quad \frac{\partial^2 \bar{\mathcal{U}}_2}{\partial s^2} + \frac{1}{s} \cdot \frac{\partial \bar{\mathcal{U}}_2}{\partial s} - \left(1 + \frac{1}{9s^2} \right) \bar{\mathcal{U}}_2 = \bar{\mathcal{H}}_2(p, s)$$

avec :

$$(3,52) \quad \begin{aligned} \bar{\mathcal{H}}_2(p, s) = & - p^{1/3} s^{-2/3} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4} \right)^{\frac{2n}{3}} (p \mathcal{P})^{-\frac{n}{3}} \\ & \times \frac{\partial}{\partial s} \left[s^{\frac{2(n+1)}{3}} \int_p^{\infty} \lambda^{-1/3} \sigma^{-1/3} \frac{\partial}{\partial \sigma} [\sigma^{1/3} \bar{\mathcal{U}}_1(\lambda, \sigma)] c_n(\lambda - p) d\lambda \right], \end{aligned}$$

et :

$$(3,53) \quad \sigma = \frac{4}{3} (\lambda \mathcal{P})^{1/2} \Psi^{3/4} = \left(\frac{\lambda}{p} \right)^{1/2} s.$$

Remplaçons dans (3,52), $\bar{\mathcal{U}}_1(p, s)$ par son expression (3,49) et utilisons les relations de récurrence des fonctions de BESSEL modifiées :

$$(3,54) \quad \begin{aligned} \bar{\mathcal{H}}_2(p, s) = & \frac{3^{1/2} \Gamma(2/3)}{2^{1/3} \pi} p^{1/3} s^{-2/3} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4} \right)^{\frac{2n}{3}} (p \mathcal{P})^{-\frac{n}{3}} \\ & \times \frac{\partial}{\partial s} \left[s^{\frac{2(n+1)}{3}} \int_p^{\infty} \lambda^{-1/3} \left[\delta_1(\lambda) + (1 - r_1) \frac{\zeta_1(\lambda)}{2c_p} \right] K_{2/3} \left(s \frac{\lambda^{1/2}}{p^{1/2}} \right) c_n(\lambda - p) d\lambda \right]. \end{aligned}$$

La solution $\bar{\mathcal{U}}_2(p, s)$ de l'équation (3,51) doit, d'autre part, obéir aux conditions aux limites :

$$(3,55) \quad \begin{cases} \lim_{s \rightarrow 0} s^{1/3} \bar{\mathcal{U}}_2(p, s) = \delta_1(p) + \frac{(1 - r_1)}{2c_p} \zeta_1(p), \\ \lim_{s \rightarrow \infty} s^{1/3} \bar{\mathcal{U}}_2(p, s) = 0. \end{cases}$$

L'intégrale générale de l'équation (3,51) est de la forme :

$$(3,56) \quad \overline{\mathcal{U}}_2(p, s) = B_2^-(p, s) I_{-1/3}(s) + B_2^+(p, s) I_{1/3}(s)$$

avec

$$(3,57) \quad \begin{cases} B_2^-(p, s) = b_2^-(p) - \frac{\pi}{3^{1/2}} \int_0^s s \overline{H}_2(p, s) I_{1/3}(s) ds, \\ B_2^+(p, s) = b_2^+(p) + \frac{\pi}{3^{1/2}} \int_0^s s \overline{H}_2(p, s) I_{-1/3}(s) ds. \end{cases}$$

La première condition du système (3,55) nous impose :

$$(3,58) \quad b_2^-(p) = 2^{-1/3} \Gamma(2/3) \left[\delta_1(p) + \frac{(1-r_1)}{2c_p} \zeta_1(p) \right].$$

Pour pouvoir satisfaire à la deuxième condition du système (3,55), il faut que :

$$(3,59) \quad \lim_{s \rightarrow \infty} B_2^-(p, s) + \lim_{s \rightarrow \infty} B_2^+(p, s) = 0,$$

donc :

$$(3,60) \quad b_2^+(p) = -2^{1/3} \Gamma(2/3) \left[\delta_1(p) + \frac{(1-r_1)}{2c_p} \zeta_1(p) \right] - \int_0^\infty s \overline{H}_2(p, s) K_{1/3}(s) ds.$$

L'intégrale ci-dessus peut s'écrire en développant :

$$(3,61) \quad \begin{aligned} \int_0^\infty s \overline{H}_2(p, s) K_{1/3}(s) ds &= \frac{3^{1/2} \Gamma(2/3)}{2^{1/3} \pi} p^{1/3} \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{3}{4} \right)^{\frac{2n}{3}} \\ &\times (p \mathfrak{F})^{-\frac{n}{3}} \int_0^\infty s^{1/3} K_{1/3}(s) \frac{\partial}{\partial s} \left[s^{\frac{2(n+1)}{3}} \int_p^\infty \lambda^{-1/3} \left[\delta_1(\lambda) + \frac{(1-r_1)}{2c_p} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \zeta_1(\lambda) \right] K_{2/3} \left(s \frac{\lambda^{1/2}}{p^{1/2}} \right) c_n(\lambda - p) d\lambda \right] ds. \end{aligned}$$

Intégrons par parties :

$$(3,62) \quad \begin{aligned} \int_0^\infty s \overline{H}_2(p, s) K_{1/3}(s) ds &= \frac{3^{1/2} \Gamma(2/3)}{2^{1/3} \pi} p^{1/3} \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{3}{4} \right)^{\frac{2n}{3}} \\ &\times (p \mathfrak{F})^{-\frac{n}{3}} \int_0^\infty s^{\frac{2n}{3}+1} K_{2/3}(s) \left[\int_p^\infty \lambda^{-1/3} \left[\delta_1(\lambda) + \frac{(1-r_1)}{2c_p} \zeta_1(\lambda) \right] \right. \\ &\quad \left. \times K_{2/3} \left(s \frac{\lambda^{1/2}}{p^{1/2}} \right) c_n(\lambda - p) d\lambda \right] ds. \end{aligned}$$

Intervertissons l'ordre des intégrations :

$$(3,63) \quad \int_0^\infty s \bar{H}_2(p, s) K_{1/3}(s) ds = \frac{3^{1/2} \Gamma(2/3)}{2^{1/3} \pi} p^{1/3} \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{3}} \\ \times (p \mathfrak{F})^{-\frac{n}{3}} \int_p^\infty \lambda^{1/3} \left[\delta_1(\lambda) + \frac{(1-r_1)}{2c_p} \zeta_1(\lambda) \right] c_n(\lambda - p) \\ \times \left[\int_0^\infty s^{\frac{2n}{3}+1} K_{2/3}\left(s \frac{\lambda^{1/2}}{p^{1/2}}\right) K_{2/3}(s) ds \right] d\lambda.$$

Utilisons les formules (2,48), (2,49) et (2,50), nous obtenons enfin :

$$(3,64) \quad \int_0^\infty s \bar{H}_2(p, s) K_{1/3}(s) ds = \frac{3^{1/2} \Gamma(2/3)}{2^{4/3} \pi} p \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2n}{3}} \\ \times \mathfrak{F}^{-\frac{n}{3}} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{3} + \frac{1}{3}\right) \Gamma^2\left(\frac{n}{3} + 1\right) \Gamma\left(\frac{n}{3} + \frac{5}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{2n}{3} + 2\right)} \int_p^\infty \lambda^{-\frac{n}{3}-1} \left[\delta_1(\lambda) + \frac{(1-r_1)}{2c_p} \zeta_1(\lambda) \right] \\ \times c_n(\lambda - p) {}_2F_1\left(\frac{n}{3} + \frac{1}{3}, \frac{n}{3} + 1; \frac{2n}{3} + 2; 1 - \frac{p}{\lambda}\right) d\lambda.$$

3,23 Densité de flux de chaleur à la paroi avec température de paroi imposée.

Le développement limité de $\mathfrak{C}_2(p, \Psi)$ au voisinage de $\Psi = 0$ est :

$$(3,65) \quad \mathfrak{C}_2(p, \Psi) = \delta_1(p) + \frac{\zeta_1(p)}{2c_p} - \frac{2^{1/2} \mathfrak{F}}{c_p} \chi_2(p) \Psi^{1/2} + 0(\Psi)$$

avec :

$$(3,66) \quad \chi_2(p) \subset \frac{\Phi_{\mathfrak{P}_2}(t_1)}{[\mu \mathfrak{C} \tau_{\mathfrak{P}_2}(t_1)]^{1/2}}.$$

Le développement limité de $\bar{\mathfrak{C}}_2(p, s)$ en série de puissances de $s^{2/3}$ sera donc, grâce à (3,47) :

$$(3,67) \quad \bar{\mathfrak{C}}_2(p, s) = \delta_1(p) + \frac{(1-r_1)}{2c_p} \zeta_1(p) - \frac{3^{2/3}}{2^{5/6}} \cdot \frac{\mathfrak{F}^{2/3}}{c_p} p^{-1/3} \chi_2(p) s^{2/3} + 0(s^{4/3}).$$

Si l'on égale les termes en $s^{2/3}$ dans l'expression (3,67) et dans le développement en puissances entières de $s^{2/3}$ de la solution de la deuxième équation du système (3,46), on obtiendra :

$$(3,68) \quad \chi_2(p) = -\frac{c_p}{\mathfrak{F}^{2/3}} \cdot \frac{2^{1/2} 3^{1/3}}{\Gamma(1/3)} p^{1/3} b_2^+(p),$$

d'où en remplaçant $b_2^+(p)$ par son expression (3,60) et en utilisant la formule (3,64) :

$$(3,69) \quad \begin{aligned} \chi_2(p) = & \frac{c_p}{\mathfrak{F}^{2/3}} \cdot \frac{2^{1/6} 3^{1/3} \Gamma(2/3)}{\Gamma(1/3)} p^{1/3} \left[\delta_1(p) + \frac{(1-r_1)}{2c_p} \zeta_1(p) \right] \\ & + \frac{c_p}{\mathfrak{F}^{2/3}} \cdot \frac{3^{5/6} \Gamma(2/3)}{2^{5/6} \pi \Gamma(1/3)} p^{4/3} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2} \right)^{\frac{2n}{3}} \mathfrak{F}^{-\frac{n}{3}} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{3} + \frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{2n}{3} + 2\right)} \\ & \times \Gamma^2\left(\frac{n}{3} + 1\right) \Gamma\left(\frac{n}{3} + \frac{5}{3}\right) \int_p^{\infty} \lambda^{-\frac{n}{3}-1} \left[\delta_1(\lambda) + \frac{(1-r_1)}{2c_p} \zeta_1(\lambda) \right] \\ & \times c_n(\lambda - p) {}_2F_1\left(\frac{n}{3} + \frac{1}{3}, \frac{n}{3} + 1; \frac{2n}{3} + 2; 1 - \frac{p}{\lambda}\right) d\lambda. \end{aligned}$$

Si l'on remplace dans (3,69) les fonctions hypergéométriques par leurs développements en séries, on obtient l'expression suivante de la densité de flux de chaleur à la paroi $\Phi_{p_2}(t_1)$:

$$(3,70) \quad \begin{aligned} \Phi_{p_2}(t_1) = & c_p \frac{2^{1/6} 3^{1/3}}{\Gamma(1/3)} (\mu\rho)^{1/2} \mathfrak{F}^{-2/3} [\tau_{p_2}(t_1)]^{1/2} \\ & \times \int_0^{t_1} (t_1 - t'_1)^{-1/3} d[\theta_p(t'_1) - \theta_{f_1}(t'_1) + \Theta(t'_1)] \end{aligned}$$

avec :

$$(3,71) \quad \begin{aligned} \Theta(t_1) = & \frac{3^{1/2}}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2} \right)^{\frac{2n}{3}} \mathfrak{F}^{-\frac{n}{3}} \Gamma\left(\frac{n}{3} + 1\right) \Gamma\left(\frac{n}{3} + \frac{5}{3}\right) \\ & \times \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{\Gamma\left(\frac{n}{3} + r + \frac{1}{3}\right)}{\left(\frac{n}{3} + r + 1\right) \Gamma\left(\frac{2n}{3} + r + 2\right)} \gamma_n^{(r)} \\ & \times \int_0^{t_1} (t_1 - t'_1)^{\frac{n}{3}+r+1} d[\theta_p(t'_1) - \theta_{f_1}(t'_1)], \end{aligned}$$

où $\gamma_n^{(r)}$ désigne la dérivée d'ordre r par rapport à t_1 de la fonction γ_n .

On a donc :

$$(3,72) \quad \begin{aligned} \Phi_{p_2}(x) = & c_p \frac{3^{1/3} (\mu\rho)^{1/2}}{\Gamma(1/3)} \mathfrak{F}^{-2/3} [\tau_{p_2}(x)]^{1/2} \\ & \times \int_0^x \left(\int_{x'}^x [\tau_{p_1}(x'')]^{1/2} dx'' \right)^{-1/3} d[\theta_p(x') - \theta_{f_1}(x') + \Theta(x')] \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned}
 (3,73) \quad \Theta(x) = & \frac{3^{1/2} \rho \mu}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2n}{3}} 3^{-\frac{n}{3}} (2 \rho \mu)^{\frac{n}{6}} \Gamma\left(\frac{n}{3} + 1\right) \\
 & \times \Gamma\left(\frac{n}{3} + \frac{5}{3}\right) \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r (2 \rho \mu)^{r/2} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{3} + r + \frac{1}{3}\right) \gamma_n^{(r)}}{\left(\frac{n}{3} + r + 1\right) \Gamma\left(\frac{2n}{3} + r + 2\right)} \\
 & \times \int_0^x \left(\int_{x'}^x [\tau_{p_1}(x'')]^{1/2} dx'' \right)^{\frac{n}{3} + r + 1} d[\theta_p(x') - \theta_{f_1}(x')].
 \end{aligned}$$

On définira facilement, de la même façon qu'aux paragraphes 2,26 et 2,27, les coefficients de convection et les températures effectives.

CONVECTION AUX NOMBRES DE PRANDTL ÉLEVÉS

Nous allons étudier à présent un problème d'un grand intérêt mathématique. C'est celui des solutions asymptotiques de l'équation de l'énergie, lorsque le nombre de Prandtl croît indéfiniment. Comme on le verra plus loin, c'est le seul cas où l'on puisse obtenir une expression analytique de la densité de flux de chaleur à la paroi, quelle que soit la distribution de température de paroi.

Ces solutions asymptotiques peuvent s'appliquer au cas des liquides non métalliques dont les nombres de Prandtl peuvent atteindre des valeurs de l'ordre de 1 000.

1,1 INTÉGRATION DE L'ÉQUATION DE L'ÉNERGIE

Lorsque le nombre de Prandtl croît indéfiniment, la pente du profil des températures croît aussi indéfiniment. On peut donc remplacer dans l'équation de l'énergie (1,26), la vitesse longitudinale u par le premier terme du développement en puissances de $\Psi^{1/2}$ de la *solution exacte* de l'équation de l'impulsion longitudinale, soit :

$$(4,1) \quad u^{(0)} = (2 \tau_p / \rho \mu)^{1/2} \Psi^{1/2}.$$

Ceci avait été fait par Lighthill en ne tenant pas compte de l'échauffement cinétique. Nous étudierons ici l'équation complète de l'énergie, soit :

$$(4,2) \quad \left[\frac{\partial T}{\partial x} - \frac{(2 \rho \mu \tau_p)^{1/2}}{\mathcal{F}} \cdot \frac{\partial}{\partial \Psi} \left(\Psi^{1/2} \frac{\partial T}{\partial \Psi} \right) = \frac{\tau_p}{2 c_p} \left(\frac{2 \tau_p}{\rho \mu} \right)^{1/2} \Psi^{-1/2} \right],$$

avec les conditions aux limites (1,27).

Posons :

$$(4,3) \quad t = \int_0^x (2 \rho \mu \tau_p)^{1/2} dx.$$

Faisons le changement de variable dans l'équation (4,2) :

$$(4,4) \quad \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{1}{\mathcal{F}} \cdot \frac{\partial}{\partial \Psi} \left(\Psi^{1/2} \frac{\partial T}{\partial \Psi} \right) = \frac{\Psi^{-1/2}}{2 c_p} \cdot \frac{\tau_p}{\rho \mu}.$$

Appliquons la transformation de CARSON par rapport à la variable t . Soit $\mathcal{C}(p, \Psi)$ l'image de la fonction $T(t, \Psi)$, l'équation (4,4) se transforme en :

$$(4,45) \quad p \mathcal{C} - \frac{1}{g} \cdot \frac{\partial}{\partial \Psi} \left(\Psi^{1/2} \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial \Psi} \right) = \frac{\Psi^{-1/2}}{2 c_p} \xi(p)$$

avec :

$$(4,6) \quad \xi(p) \subset \frac{\tau_p(t)}{\rho \mu},$$

$\mathcal{C}(p, \Psi)$ obéit aux conditions aux limites :

$$(4,7) \quad \begin{cases} \lim_{\Psi \rightarrow 0} \mathcal{C}(p, \Psi) = \delta(p) + \frac{\zeta(p)}{2 c_p}, \\ \lim_{\Psi \rightarrow \infty} \mathcal{C}(p, \Psi) = 0. \end{cases}$$

$\delta(p)$ et $\zeta(p)$ sont les images des fonctions $\theta_p(t) \rightarrow \theta_t$ et $u_e^2(t)$.

Faisons le changement de variables :

$$(4,8) \quad \begin{cases} s = \frac{4}{3} (p \mathcal{C})^{1/2} \Psi^{3/4}, \\ \mathcal{U}(p, s) = s^{-1/3} \mathcal{C}(p, \Psi), \end{cases}$$

$\mathcal{U}(p, s)$ est la solution d'une équation de BESSEL avec second membre :

$$(4,9) \quad \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial s^2} + \frac{1}{s} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial s} - \left(1 + \frac{1}{9 s^2} \right) \mathcal{U} = H(p, s),$$

avec :

$$(4,10) \quad H(p, s) = - \frac{2^{1/3}}{3^{2/3}} \cdot \frac{g^{1/3}}{c_p} \cdot \frac{\xi(p)}{p^{2/3} s}.$$

Nous trouverons, de la même manière qu'au paragraphe 2,21, que :

$$(4,11) \quad \mathcal{U}(p, s) = B^-(p, s) I_{-1/3}(s) + B^+(p, s) I_{1/3}(s)$$

avec :

$$(4,12) \quad \begin{cases} B^-(p, s) = b^-(p) - \frac{\pi}{3^{1/2}} \int_0^s s H(p, s) I_{1/3}(s) ds, \\ B^+(p, s) = b^+(p) + \frac{\pi}{3^{1/2}} \int_0^s s H(p, s) I_{-1/3}(s) ds \end{cases}$$

et :

$$(4,13) \quad \begin{cases} b^-(p) = 2^{-1/3} \Gamma(2/3) \left[\delta(p) + \frac{\zeta(p)}{2 c_p} \right], \\ b^+(p) = - 2^{-1/3} \Gamma(2/3) \left[\delta(p) + \frac{\zeta(p)}{2 c_p} \right] \\ \quad - \int_0^\infty s H(p, s) K_{1/3}(s) ds. \end{cases}$$

Nous avons :

$$(4,14) \quad \int_0^\infty s H(p, s) K_{1/3}(s) ds = -\frac{2^{1/3}}{3^{2/3}} \cdot \frac{\mathfrak{F}^{1/3}}{c_p} \cdot \frac{\xi(p)}{p^{2/3}} \int_0^\infty K_{1/3}(s) ds ;$$

comme :

$$(4,15) \quad \int_0^\infty s^\alpha K_\mu(s) ds = 2^{\alpha-1} \Gamma\left(\frac{\alpha + \mu + 1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha - \mu + 1}{2}\right),$$

l'expression de $b^+(p)$ donnée par (4,13) devient :

$$(4,16) \quad b^+(p) = -2^{-1/3} \Gamma(2/3) \left[\delta(p) + \frac{\zeta(p)}{2c_p} \right] + \frac{2^{1/3} \pi}{3^{7/6}} \cdot \frac{\mathfrak{F}^{1/3}}{c_p} \cdot \frac{\xi(p)}{p^{2/3}}.$$

4,2 DENSITÉ DE FLUX DE CHALEUR A LA PAROI ET FACTEUR THERMIQUE PARIÉTAL DE FROTTEMENT

De la même manière qu'au paragraphe 2,22, on trouvera que :

$$(4,17) \quad \chi(p) = -\frac{c_p}{\mathfrak{F}^{2/3}} \cdot \frac{2^{1/3} 3^{1/3}}{\Gamma(1/3)} p^{1/3} b^+(p)$$

avec :

$$(4,18) \quad \chi(p) \subset \frac{\Phi_p(t)}{[\mu \rho \tau_p(t)]^{1/2}}.$$

Remplaçons dans (4,17) $b^+(p)$ par son expression (4,16) :

$$(4,19) \quad \chi(p) = c_p \cdot \frac{2^{1/6} 3^{1/3} \Gamma(2/3)}{\Gamma(1/3)} \mathfrak{F}^{-2/3} p^{1/3} \left[\delta(p) + \frac{\zeta(p)}{2c_p} \right] - \frac{2^{5/6} \pi}{3^{5/6} \Gamma(2/3)} \mathfrak{F}^{-1/3} \frac{\xi(p)}{p^{1/3}}.$$

Lorsque la paroi est thermiquement isolée, $\chi(p) = 0$. On aura donc :

$$(4,20) \quad \delta(p) = \frac{2^{2/3} \pi}{3^{7/6} \Gamma(2/3)} \cdot \frac{\mathfrak{F}^{-1/3}}{c_p} p^{-2/3} \xi(p) - \frac{\zeta(p)}{2c_p}.$$

En prenant l'original de cette relation, on obtient la température de frottement :

$$(4,21) \quad \theta_f(t) = \theta_t - \frac{u_e^2(t)}{2c_p} + \frac{3^{1/3}}{2^{1/3}} \cdot \frac{\mathfrak{F}^{-1/3}}{\rho \mu c_p} \int_0^t (t-t')^{-1/3} \tau_p(t') dt'$$

ou :

$$(4,22) \quad \boxed{\theta_f(x) = \theta_t - \frac{u_e^2(x)}{2c_p} + \frac{3^{1/3}}{(\rho \mu)^{2/3}} \cdot \frac{\mathfrak{F}^{-1/3}}{c_p} \times \int_0^x \left(\int_{x'}^x [\tau_p(x'')]^{1/2} dx'' \right)^{-1/3} [\tau_p(x')]^{3/2} dx' .}$$

Le facteur thermique pariétal de frottement défini par la formule (2,73) est donc :

$$(4,23) \quad \boxed{r = \frac{\Gamma^2(1/3)}{3^{1/6} \pi} \cdot \frac{\mathfrak{F}^{1/3}}{(\rho \mu)^{2/3}} \cdot \frac{1}{u_e^2(x)} \int_0^x \left(\int_{x'}^x [\tau_p(x'')]^{1/2} dx'' \right)^{-1/3} [\tau_p(x')]^{3/2} dx' .}$$

Le facteur thermique pariétal est proportionnel à $\mathfrak{F}^{1/3}$ lorsque $\mathfrak{F}$ est élevé.

D'autre part, si l'on tient compte de la relation (2,28) :

$$(4,24) \quad r = \frac{\Gamma^3(1/3)}{2\pi\sqrt{3}} \cdot \mathfrak{F}^{1/3} \frac{\int_0^x \left(\int_{x'}^x [\tau_p(x'')]^{1/2} dx'' \right)^{-1/3} [\tau_p(x')]^{3/2} dx'}{\int_0^x \left(\int_{x'}^x [\tau_{p_1}(x'')]^{1/2} dx'' \right)^{-1/3} [\tau_{p_1}(x')]^{3/2} dx'}$$

r dépend donc de la distribution de vitesse extérieure, mais variera relativement peu si la première approximation étudiée dans le second chapitre conduit à une erreur peu importante sur la tension de frottement à la paroi.

La densité de flux de chaleur à la paroi s'exprime à l'aide d'une intégrale de STIELTJES :

$$(4,25) \quad \Phi_p(x) = c_p \frac{3^{1/3}}{\Gamma(1/3)} (\mu\rho)^{1/3} \mathfrak{F}^{-2/3} [\tau_p(x)]^{1/2} \times \int_0^x \left(\int_{x'}^x [\tau_p(x'')]^{1/2} dx'' \right)^{-1/3} d[\theta_p(x') - \theta_f(x')]$$

θ_f étant donné par la formule (4,22).

LIGHTHILL avait obtenu une formule analogue où θ_f était remplacé par θ_t , puisqu'il avait négligé l'échauffement cinétique. En outre, LIGHTHILL avait essayé d'appliquer cette formule, valable seulement pour des nombres de Prandtl élevés, au cas des nombres de Prandtl voisins de 1.

4,3 COEFFICIENT DE CONVECTION LOCAL

On peut montrer, de la même manière qu'au paragraphe 2,26, que le coefficient de convection local pour une distribution donnée de la température à la paroi est :

$$(4,26) \quad \alpha(x) = c_p \frac{3^{1/3}}{\Gamma(1/3)} (\mu\rho)^{1/3} \mathfrak{F}^{-2/3} \frac{[\tau_p(x)]^{1/2}}{\theta_p(x) - \theta_t} \times \int_0^x \left(\int_{x'}^x [\tau_p(x'')]^{1/2} dx'' \right)^{-1/3} d[\theta_p(x') - \theta_t]$$

La température effective locale est :

$$(4,27) \quad \theta_{eff}(x) = \theta_t + [\theta_p(x) - \theta_t] \frac{\int_0^x \left(\int_{x'}^x [\tau_p(x'')]^{1/2} dx'' \right)^{-1/3} d[\theta_f(x') - \theta_t]}{\int_0^x \left(\int_{x'}^x [\tau_p(x'')]^{1/2} dx'' \right)^{-1/3} d[\theta_p(x') - \theta_t]}$$

4,4

COEFFICIENT DE CONVECTION MOYEN

De même, le coefficient de convection moyen sera :

$$(4,28) \quad \alpha_m(x) = c_p \frac{3^{4/3} (\mu_p)^{1/3}}{2 \Gamma(1/3)} \cdot \frac{\mathcal{F}^{-2/3}}{x [\theta_p(x) - \theta_t]} \times \int_0^x \left(\int_{x'}^x [\tau_p(x'')]^{1/2} dx'' \right)^{2/3} d[\theta_p(x') - \theta_t],$$

tandis que la température effective moyenne sera :

$$(4,29) \quad \theta_{eff}(x) = \theta_t + [\theta_p(x) - \theta_t] \frac{\int_0^x \left(\int_{x'}^x [\tau_p(x'')]^{1/2} dx'' \right)^{2/3} d[\theta_f(x') - \theta_t]}{\int_0^x \left(\int_{x'}^x [\tau_p(x'')]^{1/2} dx'' \right)^{2/3} d[\theta_p(x') - \theta_t]}$$

CHAPITRE V

APPLICATION AU CAS PARTICULIER OU $u_e = c x^m$

Nous allons appliquer la méthode de calcul de la tension de frottement et de la densité de flux de chaleur à la paroi introduite dans les chapitres précédents à un cas particulier d'une grande importance théorique : celui où la vitesse à l'extérieur de la couche limite est proportionnelle à une puissance quelconque de l'abscisse, soit $u_e = c x^m$.

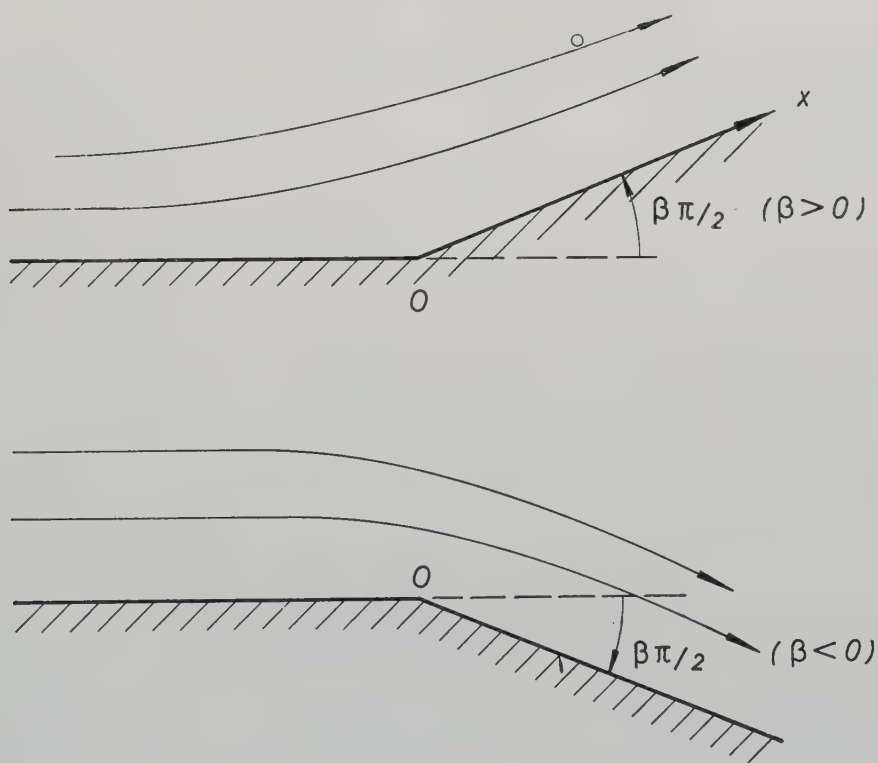


Fig. 2.

Cette distribution est rencontrée lorsque l'on étudie l'écoulement d'un fluide parfait le long d'un dièdre d'angle supplémentaire $\frac{\beta \pi}{2}$ (fig. 2). On a alors, sur la demi-droite Ox , $u(x) = c x^m$, avec $m = \beta / (2 - \beta)$, c étant indéterminé (voir notamment [21]).

Comme :

$$-2 < \beta < 2,$$

on aura :

$$-\frac{1}{2} < m < \infty.$$

On a donc pris l'habitude de parler de la couche limite sur des dièdres, lorsque l'on étudie des obstacles pour lesquels $u_e = c x^m$, bien que dans le cas des dièdres, on ne puisse pas définir une vitesse à l'infini amont, sauf pour $m = 0$. (Remarquons que le cas $m = 1$ peut s'appliquer au voisinage du point d'arrêt d'un obstacle arrondi.)

Ces réserves étant faites, nous allons chercher comment se transforment les formules de la première et de la seconde approximation dans notre cas particulier.

5,1

COEFFICIENT DE FROTTEMENT

5,11 Première approximation.

Lorsque l'on examine la définition de t_1 et la formule (2,27), on s'aperçoit que si τ_{p_1} est proportionnel à une puissance de t_1 , u_e sera proportionnel à une puissance de x , sous réserve de l'existence de l'image $\xi_1(p)$. Par suite de la biunivocité de la transformation $t_1(x)$ lorsque τ_{p_1} n'est ni nul ni négatif, on conclut à la réciprocity de la proposition précédente.

Soit :

$$(5,1) \quad \tau_{p_1}(t_1) = c' t_1^{m'} \quad (c' > 0).$$

On a donc :

$$(5,2) \quad \xi_1(p) = \frac{c'}{\rho\mu} \cdot \frac{\Gamma(m' + 1)}{p^{m'}},$$

à condition que :

$$m' > -1.$$

D'où :

$$(5,3) \quad \zeta_1(p) = \frac{c'}{\rho\mu} \cdot \frac{2^{2/3} 3^{1/3} \Gamma(2/3)}{\Gamma(1/3)} \cdot \frac{\Gamma(m' + 1)}{p^{m' + \frac{2}{3}}}$$

et :

$$(5,4) \quad u_e^2(t_1) = c' \frac{2^{2/3} 3^{1/3}}{\rho\mu} \cdot \frac{\Gamma(2/3) \Gamma(m' + 1)}{\Gamma(1/3) \Gamma(m' + \frac{5}{3})} t_1^{m' + \frac{2}{3}}.$$

Éliminons t_1 grâce à la relation :

$$(5,5) \quad x(t_1) = \int_0^{t_1} \frac{dt_1}{(2 \rho\mu \tau_{p_1})^{1/2}} = \left(\frac{2}{\rho\mu c'} \right)^{1/2} \cdot \frac{t_1^{1 - \frac{m'}{2}}}{2 - m'}.$$

Si l'on identifie u_e^2 à $c^2 x^{2m}$, on obtiendra :

$$(5,6) \quad m' = \frac{2(3m-1)}{3(m+1)}$$

et :

$$(5,7) \quad c' = c^{\frac{2}{m+1}} \cdot \frac{3^{\frac{6m-1}{3m+3}}}{2^{\frac{15m+2}{3m+3}}} \cdot \frac{(m+1)^{\frac{2m}{m+1}}}{(\rho\mu)^{\frac{m-1}{m+1}}} [Q(m)]^{\frac{1}{m+1}},$$

où :

$$(5,8) \quad Q(m) = \frac{\Gamma(1/3) \Gamma\left(\frac{11m+3}{3m+3}\right)}{\Gamma(2/3) \Gamma\left(\frac{9m+3}{3m+3}\right)}.$$

La condition $c' > 0$, nous impose $m > -\frac{1}{9}$, ce qui satisfait également à la condition $m' > -1$.

Inversons la relation (5,5) en remplaçant m' et c' par leurs expressions (5,6) et (5,7) :

$$(5,9) \quad t_1 = c^{3/4} \frac{2^{13/8}}{3^{7/8}} (\rho\mu)^{3/4} (m+1)^{3/4} [Q(m)]^{3/8} x^{\frac{3(m+1)}{4}}.$$

La tension de frottement à la paroi sera donc :

$$(5,10) \quad \tau_{p_1}(x) = c^{3/2} \frac{3^{1/4} (\rho\mu)^{1/2} (m+1)^{1/2}}{2^{7/4}} [Q(m)]^{3/4} x^{\frac{3m-1}{2}}.$$

Le coefficient de frottement local $C_{f_1} = 2 \tau_{p_1} / \rho u_e^2$ s'exprimera sous la forme :

$$(5,11) \quad C_{f_1} \mathcal{R}_x^{1/2} = \frac{3^{1/4} (m+1)^{1/2}}{2^{3/4}} [Q(m)]^{3/4},$$

où $\mathcal{R}_x = u_e x / \nu$ est le nombre de Reynolds.

D'autre part, l'intégration de l'équation de l'impulsion mise sous la forme (1,32) conduit à :

$$(5,12) \quad C_f \mathcal{R}_x^{1/2} = f''(\beta; 0) \sqrt{2(m+1)}.$$

HARTREE, puis A. M. O. SMITH [22] ont calculé les valeurs de $f''(\beta; 0)$ pour différentes valeurs de m .

Dans le tableau II, nous avons porté les valeurs de $C_{f_1} \mathcal{R}_x^{1/2}$ ainsi que les valeurs exactes de $C_f \mathcal{R}_x^{1/2}$.

TABLEAU II

$m \dots\dots$	— 1/9	— 0,0904	— 0,0654	0	1/9	1/3	1	4	∞
$\beta \dots\dots$	— 0,25	— 0,1988	— 0,14	0	0,20	0,50	1	1,6	2
$C_f \mathcal{R}_x^{1/2} \dots$		0	0,3277	0,6641	1,0233	1,5149	2,4651	4,8114	$2,3861 m^{1/2}$
$C_{f_1} \mathcal{R}_x^{1/2} \dots$	0	0,2013	0,3494	0,6234	0,9456	1,3960	2,2720	4,4362	$2,2004 m^{1/2}$
Erreur %		∞	6,6	— 6,1	— 7,6	— 7,8	— 7,8	— 7,8	— 7,8

Nous avons porté, sur la planche 2, la courbe représentative de $C_{f_1} \mathcal{R}_x^{1/2} / (m + 1)^{1/2}$ en fonction de $\beta = 2m / (m + 1)$.

Lorsque le paramètre m croît, l'erreur relative augmente. Cela s'explique facilement, puisque les termes en Ψ et en $\Psi^{3/2}$ de $u(x, \Psi)$ ne sont plus nuls, lorsque m est différent de zéro.

Lorsque m tend vers $-1/9$, τ_{p_1} tend vers zéro en chaque point de la paroi; tandis que l'expression exacte de τ_p est constamment nulle pour une valeur de $m = -0,0904$, plus faible en valeur absolue.

5,12 Seconde approximation.

Les coefficients $b_n(t_1)$ définis par le système (3,27), se mettent sous la forme :

$$(5,13) \quad b_{n+2}(t_1) = -2 a_1^2 D_n(m) t_1^{-n/3}$$

avec :

$$(5,14) \quad \left\{ \begin{array}{l} D_{3i}(m) = \frac{2^{2i-1}}{3^i \cdot i!} \cdot \frac{\prod_{r=1}^i \left(\frac{9m+1}{3m+3} - r \right)}{\prod_{r=1}^i (3r+2)}, \\ D_{3i+1}(m) = - \frac{2^{2i+\frac{2}{3}}}{3^{i+\frac{2}{3}} (i+1)! Q(m)} \cdot \frac{\prod_{r=1}^{i+1} \left(\frac{11m+3}{3m+3} - r \right)}{\prod_{r=1}^{i+1} (3r-2)}, \\ D_{3i+2}(m) = 0. \end{array} \right.$$

On trouve aisément, à l'aide de la relation (3,31), que :

$$(5,15) \quad \gamma_n(t_1) = d_n(m) t_1^{-n/3} \quad (n \geq 1).$$

Les $d_n(m)$ sont reliés par la relation de récurrence suivante :

$$(5,16) \quad d_n(m) = D_n(m) - \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{n-1} d_p(m) d_{n-p}(m) \quad (n \geq 2)$$

avec :

$$(5,17) \quad d_1(m) = D_1(m) = -\frac{2^{11/3} m}{3^{5/3} (m+1) Q(m)}.$$

Les originaux de $p \gamma_n(p)$ seront donc :

$$(5,18) \quad c_n(t_1) = \frac{d_n(m)}{\Gamma(n/3)} t_1^{\frac{n}{3}-1} \quad (n \geq 1).$$

Faisons le changement de variable $Y = p/\lambda$ dans l'expression (3,37), et utilisons la formule :

$$(5,19) \quad \int_0^1 Y^{\alpha-1} (1-Y)^{\beta-1} {}_2F_1(a, b; c; 1-Y) dY \\ = \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} {}_3F_2(a, b, \beta; c, \alpha+\beta; 1),$$

${}_3F_2$ étant une fonction hypergéométrique d'ordre supérieur.

Le coefficient de frottement local $C_{f2} = 2\tau_{p2}/\rho u_e^2$ correspondant à la seconde approximation prend la forme :

$$(5,20) \quad C_{f2} R_x^{1/2} = \frac{3^{1/4} (m+1)^{1/2}}{2^{3/4}} [Q(m)]^{3/4} \left[1 - \frac{1}{2 \cdot 3^{3/2} \pi} \right. \\ \times \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2} \right)^{\frac{2n}{3}} n^2 d_n(m) \frac{\Gamma^2\left(\frac{n}{3}\right) \Gamma\left(\frac{n}{3} + \frac{1}{3}\right) \Gamma\left(\frac{n}{3} + \frac{5}{3}\right) \Gamma\left(\frac{9m+1}{3m+3}\right)}{\Gamma\left(\frac{2n}{3} + 2\right) \Gamma\left(\frac{n}{3} + \frac{9m+1}{3m+3}\right)} \\ \left. \times {}_3F_2\left(\frac{n}{3} + \frac{1}{3}, \frac{n}{3} + 1, \frac{n}{3}; \frac{2n}{3} + 2, \frac{n}{3} + \frac{9m+1}{3m+3}; 1\right) \right]$$

Lorsque m est quelconque, les fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur et d'argument unité ne peuvent pas se ramener généralement à des fonctions plus simples [23].

La formule (5,20) se simplifie dans deux cas :

1° $m = 0$.

Seuls les D_{3i} ne sont pas nuls; ils sont égaux à :

$$(5,21) \quad D_{3i}(0) = (-1)^i \frac{2^{2i}}{3^{2i} \cdot i! (3i + 2)}.$$

On voit, grâce à la formule (5,16), que seuls les $d_{3i}(0)$ ne sont pas nuls.

D'après la définition des fonctions hypergéométriques :

$$(5,22) \quad {}_3F_2(a, b, d; d, c; 1) = {}_2F_1(a, b; c; 1) = \frac{\Gamma(c) \Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a) \Gamma(c-b)},$$

si :

$$c - a - b > 0;$$

on aura :

$$(5,23) \quad C_{f_2} \mathcal{R}_x^{1/2} = \frac{3^{5/8} [\Gamma(1/3)]^{3/4}}{2^{3/2} \pi^{3/4}} \left[1 - \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^i \frac{d_{3i}(0)}{i+1} \frac{i}{r-0} (3r+2) \right].$$

Si l'on arrête la série au sixième terme, on aura $C_{f_2} \mathcal{R}_x^{1/2} = 0,67415$, d'où une erreur par excès de 1,5 % par rapport à la valeur exacte 0,66412. Dans le cas de la première approximation, on avait obtenu 0,62340, d'où une erreur par défaut de 6,1 %.

2° $m = 1/3$.

Seuls les D_{3i+1} ne sont pas nuls; ils sont égaux à :

$$(5,24) \quad D_{3i+1}(1/3) = (-1)^{i+1} \frac{2^{2i+\frac{2}{3}}}{3^{2i+\frac{2}{3}} (3i+1) (i+1)! \Gamma(1/3)}.$$

Par contre, les $d_n(1/3)$ sont tous différents de zéro. On a, enfin, en utilisant la formule (5,22) :

$$(5,25) \quad C_{f_2} \mathcal{R}_x^{1/2} = \frac{2}{3} [\Gamma(1/3)]^{3/4} \left[1 - \frac{2}{\Gamma(1/3)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2n}{3}} \frac{d_n(1/3)}{n+3} \Gamma\left(\frac{n}{3} + \frac{1}{3}\right) \right].$$

Si l'on arrête la série au neuvième terme, on aura $C_{f_2} \mathcal{R}_x^{1/2} = 1,53793$, d'où une erreur par excès de 1,5 % par rapport à la valeur exacte 1,51489. Dans le cas de la première approximation, on avait obtenu, 1,39599, d'où une erreur par défaut de 7,9 %.

On voit que la deuxième approximation conduit à des valeurs remarquablement voisines des valeurs exactes.

5,2. FACTEUR THERMIQUE PARIÉTAL DE FROTTEMENT

5,21 Première approximation.

Nous n'avons pu calculer le facteur thermique pariétal de frottement que dans la première approximation. Nous avons trouvé qu'il ne dépendait que du nombre de Prandtl et qu'il était exprimé soit par (2,74), soit par (2,75).

De nombreux auteurs ont calculé r dans le cas où $u_e = cx^m$. Il semble que r dépende de m , mais les résultats diffèrent selon les auteurs et la plupart n'ont pas fourni la précision de leurs résultats.

Nous donnerons dans le tableau III les valeurs de r , lorsque $\mathcal{F} = 0,7$, calculées par ECKERT et DREWITZ [6], par SCHUH [24], par TIFFORD [25], par LEVY et SEBAN [26] et par TIFFORD et CHU [8].

TABLEAU III

m	— 0,0904	— 0,0654	0	1/9	1/3	1	4	∞
β	— 0,1988	— 0,14	0	0,2	0,5	1	1,6	2
ECKERT ET DREWITZ		0,838	0,833	0,818	0,805	0,791	0,768	
SCHUH			0,840			0,840		
TIFFORD			0,835			0,830		
LEVY ET SEBAN	0,762					0,815		
TIFFORD ET CHU	0,844	0,850	0,846		0,846	0,844		0,840
PREMIÈRE APPROXIM	0,835	0,835	0,835	0,835	0,835	0,835	0,835	0,835

LEVY et SEBAN disent avoir obtenu leurs valeurs avec une erreur maximale de 0,5 %. Dans ce cas, le fait d'utiliser la formule de la première approximation $r_1(m) = 0,835$, pour $\mathcal{F} = 0,7$, conduirait à une erreur par excès de 9 à 9,9 % lorsque $m = -0,0904$, et à une erreur par excès de 1,9 à 3 % lorsque $m = 1$.

5,22 Nombres de Prandtl élevés.

L'expression exacte de la tension de frottement à la paroi lorsque $u_e = cx^m$ est :

$$(5,26) \quad \tau_p = \frac{c^{3/2} (\mu_p)^{1/2}}{2^{1/2}} f''(\beta; 0) (m+1)^{1/2} x^{\frac{3m-1}{2}},$$

où $f''(\beta; 0)$ est obtenu à l'aide de l'intégration numérique de l'équation (1,31) avec les conditions (1,33).

Remplaçons τ_p par cette expression dans la formule (4,23) du facteur thermique pariétal de frottement :

$$(5,27) \quad r(m) = \frac{2^{2/3} \Gamma^3(1/3)}{3^{5/6} \pi Q(m)} [f''(\beta; 0)]^{4/3} \mathfrak{F}^{1/3}.$$

On peut mettre également $r(m)$ sous la forme :

$$(5,28) \quad r(m) = \left(\frac{\tau_p}{\tau_{p1}} \right)^{4/3} \frac{\Gamma^3(1/3)}{2 \pi \sqrt{3}} \mathfrak{F}^{1/3}.$$

Nous avons porté, dans le tableau IV, les valeurs du coefficient de $\mathfrak{F}^{1/3}$ en fonction de m :

TABLEAU IV

$m \dots \dots \dots$	— 0,0904	— 0,0654	0	1/9	1/3	1	4	∞
$\beta \dots \dots \dots$	— 0,1988	— 0,14	0	0,20	0,50	1	1,6	2
$r(m) \mathfrak{F}^{-1/3}$	0	1,622	1,922	1,963	1,970	1,970	1,969	1,968

Le facteur thermique pariétal varie peu en fonction du paramètre m , puisque $r(m)$ tend vers une valeur de 2,4 % supérieure seulement à $r(0)$, lorsque m croît indéfiniment.

On remarquera que $r(m)$ est nul lorsque $m = -0,0904$. Il ne faut pas prendre ce résultat en considération, car on a alors $\tau_p = 0$ et le terme en Ψ de $u(x, \Psi)$ devient prépondérant.

La première approximation nous avait donné la formule :

$$(5,29) \quad r_1 = \frac{\Gamma^3(1/3)}{2 \pi \sqrt{3}} \mathfrak{F}^{1/3} = 1,7666 \mathfrak{F}^{1/3}.$$

On commet donc en adoptant r_1 une erreur par défaut de 8,1%, lorsque $m = 0$, et de 10,2 %, lorsque m croît indéfiniment :

5,3 COEFFICIENT DE CONVECTION LOCAL LORSQUE $\theta_p - \theta_t = bx^l$

Nous allons étudier le cas particulier $\theta_p(x) - \theta_t = bx^l$, l étant un nombre quelconque. Les distributions de température de paroi que l'on rencontre en pratique, lorsqu'on tient compte des phénomènes de conduction thermique et de rayonnement, peuvent être mises sous la forme de séries de fonctions de ce type.

5,31 Première approximation.

Le problème peut être traité à l'aide de la méthode du second chapitre, *sous réserve de l'existence de l'image $\chi_1(p)$* .

Remplaçons x par son expression (5,5) :

$$(5,30) \quad \theta_p(t_1) = b \left[\frac{3(m+1)}{4(\rho\mu c')^{1/2}} \right]^l t_1^{\frac{4l}{3(m+1)}} + \theta_t,$$

où c' est donné par (5,7).

On a donc :

$$(5,31) \quad \delta_1(p) = b \left[\frac{3(m+1)}{4(\rho\mu c')^{1/2}} \right]^l \frac{\Gamma\left(\frac{4l}{3m+3} + 1\right)}{p^{\frac{4l}{3m+3}}}.$$

D'après la formule (2,62) :

$$(5,32) \quad \chi_1(p) = c_p \frac{2^{1/6} 3^{1/2} \Gamma(2/3)}{\Gamma(1/3)} \mathfrak{F}^{-2/3} \left\{ b \left[\frac{3(m+1)}{4(\rho\mu c')^{1/2}} \right]^l \right. \\ \left. \times \frac{\Gamma\left(\frac{4l}{3m+3} + 1\right)}{p^{\frac{4l-m-1}{3m+3}}} + \frac{(1-r_1)}{2c_p} \cdot \frac{c'}{\rho\mu} \cdot \frac{2^{2/3} 3^{1/3} \Gamma(2/3)}{\Gamma(1/3)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{9m+1}{3m+3}\right)}{p^{\frac{7m-1}{3m+3}}} \right\}.$$

Pour que $\chi_1(p)$ existe, il faut que :

$$(5,33) \quad \frac{7m-1}{3m+3} > -1 \quad \text{et} \quad \frac{4l}{3m-3} - \frac{1}{3} > -1.$$

Comme on s'est limité au cas où $m > -1/9$ pour le calcul de τ_p , la première condition est toujours satisfaite. La deuxième condition nous impose :

$$(5,34) \quad \boxed{l > -\frac{3(m+1)}{4}}.$$

La formule (2,85) donnant la température effective locale devient, en utilisant la formule (5,10) :

$$(5,35) \quad \theta_{eff_1}(m, l; x) = \theta_t + (r_1 - 1) R(m, l) \frac{u_e^2}{2 c_p}$$

avec :

$$(5,36) \quad R(m, l) = \frac{\Gamma\left(\frac{11m+3}{3m+3}\right) \Gamma\left(\frac{4l+2m+2}{3m+3}\right)}{\Gamma\left(\frac{10m+2}{3m+3}\right) \Gamma\left(\frac{4l+3m+3}{3m+3}\right)}.$$

Le facteur thermique pariétal de convection local sera :

$$(5,37) \quad r_{e_1} = 1 + (r_1 - 1) R(m, l).$$

Il est donc constant le long de la paroi. Lorsque $\mathcal{F} = 1$, $\theta_{eff_1} = \theta_t$ et $r_{e_1} = 1$ quelles que soient les valeurs de m et de l .

D'autre part, le coefficient de convection local sera donné par la formule (2,83) qui devient :

$$(5,38) \quad \alpha_1(m, l; x) = \frac{R(m, 0)}{R(m, l)} \alpha_1(m, 0; x)$$

avec :

$$(5,39) \quad \alpha_1(m, 0; x) = c_p (\mu \rho)^{1/2} \mathcal{F}^{-2/3} \frac{3^{3/4} (m+1)^{1/2}}{2^{5/4} \Gamma(1/3)} [Q(m)]^{1/4} c^{1/2} x^{\frac{m-1}{2}}.$$

Le nombre de Nusselt local $\alpha_1 x / \lambda$ s'exprimera sous la forme :

$$(5,40) \quad \mathcal{N}_{x_1} \mathcal{R}_x^{-1/2} = \mathcal{F}^{1/3} \frac{3^{3/4} (m+1)^{1/2}}{2^{5/4} \Gamma(1/3)} \cdot \frac{R(m, 0)}{R(m, l)} [Q(m)]^{1/4}.$$

Le nombre de Nusselt est proportionnel à la racine cubique du nombre de Prandtl. Cette variation est spécifique aux théories linéarisées de la convection où l'on remplace la vitesse u par le terme prépondérant près de la paroi. LÉVÊQUE [27] avait trouvé pour la première fois une telle variation dans le cas de l'écoulement dans un tuyau cylindrique. Dans le cas d'une distribution de température de paroi uniforme sur une plaque plane, E. POHLHAUSEN [16] avait remarqué que la *formule empirique* $\mathcal{N}_x \mathcal{R}_x^{-1/2} = 0,332 \mathcal{F}^{1/3}$ représentait, avec une bonne approximation, les résultats de l'intégration de l'équation de l'énergie.

Nous allons à présent comparer notre formule (5,40) aux valeurs exactes dans les deux cas particuliers les plus étudiés jusqu'ici, celui d'une température de paroi uniforme et celui d'un gradient de pression nul.

1° $l = 0$.

Le nombre de Nusselt s'exprime alors par la formule :

$$(5,41) \quad \mathcal{N}_{x_1} \mathcal{R}_x^{-1/2} = \mathfrak{F}^{1/3} \frac{3^{3/4} (m+1)^{1/2}}{2^{5/4} \Gamma(1/3)} \cdot [\mathcal{Q}(m)]^{1/4}.$$

Dans le tableau V, se trouvent les valeurs de $\mathcal{N}_{x_1} \mathcal{R}_x^{-1/2}$ en fonction de m , ainsi que les valeurs de $\mathcal{N}_x \mathcal{R}_x^{-1/2}$ données par la formule :

$$(5,42) \quad \mathcal{N}_x \mathcal{R}_x^{-1/2} = \sqrt{\frac{m+1}{2}} \left[\int_0^\infty \exp \left(-\mathfrak{F} \int_0^\eta f(\beta; \eta') d\eta' \right) d\eta \right]^{-1} = Y'_0(\beta; \mathfrak{F}; 0),$$

dans le cas où $\mathfrak{F} = 1$.

TABLEAU V

$m \dots\dots\dots$	— 1/9	— 0,0904	— 0,0654	0	1/9	1/3	1	4	∞
$\beta \dots\dots\dots$	— 0,25	— 0,1988	— 0,14	0	0,20	0,50	1	1,6	2
$\mathcal{N}_x \mathcal{R}_x^{-1/2}$		0,2202	0,2844	0,3321	0,3777	0,4401	0,5704	0,9387	0,4288 $m^{1/2}$
$\mathcal{N}_{x_1} \mathcal{R}_x^{-1/2}$	0	0,2204	0,2673	0,3316	0,3947	0,4776	0,6430	1,0908	0,5050 $m^{1/2}$
Erreur %		0,1	— 6	— 0,1	4,5	8,5	12,7	16,2	17,8

Nous avons porté, sur la planche 3, les courbes représentatives de la variation de $\mathcal{N}_x \mathcal{R}_x^{-1/2}/(m+1)^{1/2}$ et de $\mathcal{N}_{x_1} \mathcal{R}_x^{-1/2}/(m+1)^{1/2}$ en fonction de β , lorsque $\mathfrak{F} = 1$.

Lorsque m est positif, l'erreur augmente en même temps que m , pour la même raison que l'erreur sur le coefficient de frottement C_{f_1} .

La fonction $R(m, l)$ devient :

$$(5,43) \quad R(m, 0) = \frac{\Gamma\left(\frac{11m+3}{3m+3}\right) \Gamma(2/3)}{\Gamma\left(\frac{10m+2}{3m+3}\right)}.$$

La courbe représentative de la variation de $R(m, 0)$ en fonction de β se trouve sur la planche 4.

Le facteur thermique pariétal de convection local r_{e_1} ne dépend pas de x et est toujours différent de r_1 , sauf si $m = 0$. TIFFORD et CHU [8] ont calculé les valeurs exactes de $r_e(m, 0)$ pour trois valeurs du nombre de Prandtl, qui sont portées dans le tableau VI, ainsi que les valeurs correspondantes de $r_{e_1}(m, 0)$.

TABLEAU VI

$\mathfrak{F} = 0,5$								
$m \dots\dots\dots$	— 0,0904	— 0,0654	0	1/9	1/3	1	4	∞
$\beta \dots\dots\dots$	— 0,1988	— 0,14	0	0,20	0,50	1	1,6	2
$r_c \dots\dots\dots$	0,757	0,743	0,720		0,585	0,487		0,345
$r_{c_1} \dots\dots\dots$	0,772	0,748	0,701	0,650	0,591	0,518	0,452	0,415
Erreur %	2	0,7	— 2,6		1	6,4		20,3
$\mathfrak{F} = 0,7$								
$m \dots\dots\dots$	— 0,0904	— 0,0654	0	1/9	1/3	1	4	∞
$\beta \dots\dots\dots$	— 0,1988	— 0,14	0	0,20	0,50	1	1,6	2
$r_c \dots\dots\dots$	0,861	0,862	0,833		0,837	0,715		0,638
$r_{c_1} \dots\dots\dots$	0,874	0,861	0,835	0,806	0,774	0,734	0,697	0,677
Erreur %	1,5	— 0,1	0,2		— 7,5	2,7		6,1
(La valeur de r_c , pour $m = 1/3$, est très vraisemblablement inexacte.)								
$\mathfrak{F} = 2$								
$m \dots\dots\dots$	— 0,0904	— 0,0654	0	1/9	1/3	1	4	∞
$\beta \dots\dots\dots$	— 0,1988	— 0,14	0	0,20	0,50	1	1,6	2
$r_c \dots\dots\dots$	1,330	1,360	1,430		1,573	1,702		1,888
$r_{c_1} \dots\dots\dots$	1,307	1,339	1,402	1,472	1,551	1,649	1,737	1,787
Erreur %	— 1,7	— 1,5	— 2		— 1,4	— 3,1		— 5,3

On remarquera que l'erreur relative croît avec m , pour la même raison que pour C_f , $\mathcal{R}_x^{1/2}$ et $\mathcal{N}_{x_1} \mathcal{R}_x^{-1/2}$.

Nous avons porté, sur la planche 5, les courbes représentatives de $r_{c_1}(m, 0)$ pour $\mathfrak{F} = 0,5, 0,7$ et 2 en fonction de β .

2° $m = 0$.

Nous avons alors :

$$(5,44) \quad \mathcal{N}_{x_1} \mathcal{R}_x^{-1/2} = \mathfrak{F}^{1/3} \cdot \frac{3^{7/8}}{2^{3/2} \pi^{1/4} [\Gamma(1/3)]^{3/4}} \cdot \frac{1}{\mathcal{R}(0, l)}$$

avec :

$$(5,45) \quad \mathcal{R}(0, l) = \frac{\Gamma\left(\frac{4l+2}{3}\right)}{\Gamma(2/3) \Gamma\left(\frac{4l+3}{3}\right)} = \frac{1}{\mathcal{R}\left(\frac{l}{2-l}, 0\right)}.$$

Nous avons donné, dans le tableau VII, les valeurs de $\mathcal{N}_{x_1} \mathcal{R}_x^{-1/2}$ pour différentes valeurs de l , en les comparant avec les valeurs calculées par CHAPMAN et RUBESIN [7] lorsque $\mathfrak{F} = 0,72$.

TABLEAU VII

$l \dots \dots \dots$	0	1	2	3	4	5	10
$\mathcal{N}_x \mathcal{R}_x^{-1/2} \dots$	0,2957	0,4887	0,5974	0,6840	0,7443	0,7987	1,0060
$\mathcal{N}_{x_1} \mathcal{R}_x^{-1/2} \dots$	0,2972	0,4792	0,5813	0,6566	0,7179	0,7702	0,9624
Erreur %.	0,5	— 1,9	— 2,7	— 4	— 3,5	— 3,5	— 4,3

(La valeur de $\mathcal{N}_x \mathcal{R}_x^{-1/2}$ calculée par CHAPMAN et RUBESIN, pour $l = 3$, est vraisemblablement inexacte, comme l'a déjà fait remarquer LIGHTHILL.)

Sur la planche 6, on trouvera les courbes représentant les variations de $\mathcal{N}_x \mathcal{R}_x^{-1/2}$ et de $\mathcal{N}_{x_1} \mathcal{R}_x^{-1/2}$ en fonction de l , lorsque $\mathfrak{F} = 0,72$.

La température effective locale est uniforme et donnée par :

$$(5,46) \quad \theta_{eff_1}(0, l; x) = \theta_t + \mathcal{R}(0, l) (r_1 - 1) \frac{u_e^2}{2 c_p},$$

mais n'est pas égale à la température de frottement, si l est différent de zéro.

3° Dans le cas général, nous avons $\theta_p(x) - \theta_t = \sum_1^N b_r x^r$, N pouvant être infini.

La densité de flux de chaleur à la paroi est alors :

$$(5,47) \quad \Phi_{p_1}(x) = \alpha_1(m, 0; x) \left\{ R(m, 0) \sum_1^N \frac{b_r x^{l_r}}{R(m, l_r)} - \theta_{eff_1}(m, 0; x) \right\}.$$

Le coefficient de convection local défini au paragraphe 2,26 est :

$$(5,48) \quad \alpha_1(x) = \alpha_1(m, 0; x) R(m, 0) \cdot \frac{\sum_1^N \frac{b_r x^{l_r}}{R(m, l_r)}}{\sum_1^N b_r x^{l_r}},$$

$\alpha_1(m, 0; x)$ étant donné par la formule (5,39).

De même, la température effective locale est :

$$(5,49) \quad \theta_{eff_1}(x) = \theta_t + (r_1 - 1) \frac{u_e^2}{2 c_p} \cdot \frac{\sum_1^N b_r x^{l_r}}{\sum_1^N \frac{b_r x^{l_r}}{R(m, l_r)}}.$$

5,32 Seconde approximation.

Remplaçons dans (3,64) $\delta_1(p)$ et les fonctions c_n par leurs expressions respectives (5,31) et (5,18) et faisons le changement de variable $Y = p/\lambda$.

Grâce à la formule (5,19), on peut obtenir l'expression du coefficient de convection local α_2 . Le nombre de Nusselt local $N_{x_2} = \alpha_2 x / \lambda$ s'exprimera sous la forme :

$$(5,50) \quad \begin{aligned} N_{x_2} R_x^{-1/2} &= \mathfrak{F}^{1/3} \frac{3^{3/4} (m+1)^{1/2}}{2^{5/4} \Gamma(1/3)} \cdot \frac{R(m, 0)}{R(m, l)} [Q(m)]^{1/4} \\ &\times \left\{ 1 - \frac{1}{2 \cdot 3^{3/2} \pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{2n/3} n^2 d_n(m) \Gamma^2\left(\frac{n}{3}\right) \Gamma\left(\frac{n}{3} + \frac{1}{3}\right) \right. \\ &\times \frac{\Gamma\left(\frac{n}{3} + \frac{5}{3}\right) \Gamma\left(\frac{9m+1}{3m+3}\right)}{\Gamma\left(\frac{2n}{3} + 2\right) \Gamma\left(\frac{n}{3} + \frac{9m+1}{3m+3}\right)} {}_3F_2\left(\frac{n}{3} + \frac{1}{3}, \frac{n}{3} + 1, \frac{n}{3}; \frac{2n}{3} + 2, \right. \\ &\left. \left. \frac{n}{3} + \frac{9m+1}{3m+3}; 1\right) \right\}^{1/2} \left\{ 1 + \frac{1}{2 \cdot 3^{3/2} \pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{2n/3} \mathfrak{F}^{-n/3} n^2 d_n(m) \right\} \end{aligned}$$

$$\times \frac{\Gamma^2\left(\frac{n}{3}\right) \Gamma\left(\frac{n}{3} + \frac{1}{3}\right) \Gamma\left(\frac{n}{3} + \frac{5}{3}\right) \Gamma\left(\frac{4l}{3m+3} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{2n}{3} + 2\right) \Gamma\left(\frac{n}{3} + \frac{4l}{3m+3} + 1\right)} \\ \times {}_3F_2\left(\frac{n}{3} + \frac{1}{3}, \frac{n}{3} + 1; \frac{n}{3}; \frac{2n}{3} + 2, \frac{n}{3} + \frac{4l}{3m+3} + 1; 1\right) \Big\}.$$

La température effective locale est donnée par la formule :

$$(5,51) \quad \theta_{eff_2}(m, l; x) = \theta_t + \frac{(r_1 - 1)}{2 c_p} u_e^2 \frac{\alpha_2(m, 2m; 0)}{\alpha_2(m, l; 0)}.$$

Le facteur thermique pariétal de convection local sera donc :

$$(5,52) \quad \boxed{r_{c_2} = 1 + (r_1 - 1) \frac{\alpha_2(m, 2m; 0)}{\alpha_2(m, l; 0)}}.$$

Comme pour le cas du coefficient de frottement, l'expression (5,50) peut être simplifiée dans deux cas :

$$1^\circ \quad m = 0 \text{ et } l = 0.$$

Nous avons alors :

$$(5,53) \quad \mathcal{N}_{x_2} \cdot \mathcal{R}_x^{-1/2} = \mathcal{F}^{1/3} \frac{3^{7/8}}{2^{3/2} \pi^{1/4} [\Gamma(1/3)]^{3/4}} \left\{ 1 - \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^i \frac{d_{3i}(0)}{i+1} \prod_{r=0}^i (3r+2) \right\}^{1/2} \\ \times \left\{ 1 + \frac{2}{3} \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}^{-i} \left(\frac{3}{4}\right)^i \frac{d_{3i}(0)}{i+1} \prod_{r=0}^i (3r+1) \right\}.$$

MERK [28] a trouvé récemment un développement exact de $\mathcal{N}_x \mathcal{R}_x^{-1/2}$ en puissances successives de $1/\mathcal{F}$:

$$(5,54) \quad \mathcal{N}_x \mathcal{R}_x^{-1/2} = \frac{3^{2/3} [f''(0; 0)]^{1/3}}{2 \Gamma(1/3)} \mathcal{F}^{1/3} \\ \times \left\{ 1 - \frac{\mathcal{F}^{-1}}{45} + \frac{2}{675} \mathcal{F}^{-2} - \frac{1 \ 168}{3 \ 007 \ 125} \mathcal{F}^{-3} + 0 \ (\mathcal{F}^{-4}) \right\}.$$

Le terme d'ordre $\mathcal{F}^{-1}$ dans les expressions entre parenthèses des formules (5,53) et (5,54) sont identiques, mais les autres termes diffèrent.

On remarquera que les formules (5,53) et (5,54) sont divergentes lorsque $\mathcal{F}$ est trop faible.

Nous avons comparé (tableau VIII) les valeurs exactes de $\mathcal{N}_x \mathcal{R}_x^{-1/2}$ recalculées par MERK [28] avec plus de précision que E. POHLHAUSEN, avec les valeurs de $\mathcal{N}_{x_1} \mathcal{R}_x^{-1/2}$ et de $\mathcal{N}_{x_2} \mathcal{R}_x^{-1/2}$ calculées en négligeant dans la formule (5,53) les termes correspondant à i supérieur à 6.

TABLEAU VIII

$\mathfrak{F}$	0,1	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$\mathcal{N}_x \mathcal{R}_x^{-1/2}$	0,1381	0,2591	0,2768	0,2926	0,3069	0,3200
$\mathcal{N}_{x_1} \mathcal{R}_x^{-1/2}$	0,1539	0,2632	0,2797	0,2945	0,3079	0,3202
Erreur %.....	1,1	1,5	1,0	0,6	0,3	0,1
$\mathcal{N}_{x_2} \mathcal{R}_x^{-1/2}$		0,2648	0,2825	0,2984	0,3129	0,3261
Erreur %.....		2,2	2,0	2,0	1,9	1,9

$\mathfrak{F}$	1	1,1	7	10	15
$\mathcal{N}_x \mathcal{R}_x^{-1/2}$	0,3321	0,3434	0,6459	0,7281	0,8341
$\mathcal{N}_{x_1} \mathcal{R}_x^{-1/2}$	0,3316	0,3424	0,6344	0,7145	0,8179
Erreur %	— 0,1	— 0,3	— 1,8	— 1,9	— 1,9
$\mathcal{N}_{x_2} \mathcal{R}_x^{-1/2}$	0,3384	0,3498	0,6577	0,7414	0,8493
Erreur %	1,9	1,9	1,8	1,8	1,8

On remarquera que la première approximation coïncide avec la formule empirique de E. POHLHAUSEN : $\mathcal{N}_x \mathcal{R}_x^{-1/2} = 0,332 \mathfrak{F}^{1/3}$.

La dérivée logarithmique de l'expression (5,53), lorsque $\mathfrak{F} = 1$, est égale à 0,350, si l'on néglige les termes correspondant à i supérieur à 6. Cette valeur est en accord avec la formule empirique d'E. ECKERT [9] : $\mathcal{N}_x \mathcal{R}_x^{-1/2} = 0,332 \mathfrak{F}^{0,35}$

2° $m = 1/3$ et $l = 0$.

On a alors :

$$\begin{aligned}
 (5,55) \quad \mathcal{N}_{x_2} \mathcal{R}_x^{-1/2} = & \frac{\mathfrak{F}^{1/3}}{[\Gamma(1/3)]^{3/4}} \left\{ 1 - \frac{2}{\Gamma(1/3)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2n}{3}} \frac{d_n(1/3)}{n+3} \Gamma\left(\frac{n+1}{3}\right) \right\}^{1/2} \\
 & \times \left\{ 1 + \frac{2}{\Gamma(1/3)} \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{F}^{-\frac{n}{3}} \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2n}{3}} \frac{d_n(1/3)}{n+3} \Gamma\left(\frac{n+1}{3}\right) \right\}
 \end{aligned}$$

Sur le tableau IX, se trouvent les valeurs de $\mathcal{N}_x \mathcal{R}_x^{-1/2}$ calculées par E. ECKERT [9] et comparées avec les valeurs de $\mathcal{N}_{x_1} \mathcal{R}_x^{-1/2}$ et de $\mathcal{N}_{x_2} \mathcal{R}_x^{-1/2}$ obtenues en négligeant dans la formule (5,55) les termes correspondant à n supérieur à 10.

TABLEAU IX

$\mathcal{F}$	0,7	0,8	1	5	10
$\mathcal{N}_x \mathcal{R}_x^{-1/2}$	0,3842	0,4042	0,4401	0,792	1,012
$\mathcal{N}_{x_1} \mathcal{R}_x^{-1/2}$	0,4230	0,4423	0,4764	0,815	1,026
Erreur %	10,1	9,4	8,2	2,9	1,4
$\mathcal{N}_{x_2} \mathcal{R}_x^{-1/2}$	0,3944	0,4148	0,4501	0,807	1,030
Erreur %	2,7	2,6	2,3	1,9	1,8

La dérivée logarithmique de l'expression (5,55), lorsque $\mathcal{F} = 1$, est égale à 0,368, si l'on néglige les termes correspondant à n supérieur à 10. E. ECKERT avait donné une formule empirique en $\mathcal{F}^{0,36}$; tandis que SIBULKIN [29], dans le cas du point d'arrêt de révolution qui se ramène au cas où $m = 1/3$ [30], avait donné une formule empirique en $\mathcal{F}^{0,4}$.

En conclusion, la deuxième approximation conduit, dans les deux cas particuliers étudiés ci-dessus, à une erreur peu supérieure à l'erreur commise sur les valeurs dites exactes obtenues par intégration numérique. Il serait intéressant d'étudier le cas général où m et l prennent des valeurs quelconques. Ceci pourrait être fait à l'aide de calculatrices électroniques.

5,33 Nombres de Prandtl élevés.

On trouve, d'une façon analogue à celle du paragraphe 5-31, que le coefficient de convection local donné par la formule (4,26) s'écrit :

$$(5,56) \quad \alpha(m, l; x) = \frac{R(m, 0)}{R(m, l)} \alpha(m, 0; x)$$

avec :

$$(5,57) \quad \alpha(m, 0; x) = c_p (\mu \rho)^{1/2} \mathcal{F}^{-2/3} \frac{3^{2/3} (m+1)^{1/2}}{2^{5/6} \Gamma(1/3)} [f''(\beta; 0)]^{1/3} c^{1/2} x^{\frac{m-1}{2}},$$

les fonctions $R(m, l)$ étant définies par la formule (5,36).

La température effective locale donnée par la formule (4,27) devient :

$$(5,58) \quad \theta_{eff}(m, l; x) = \theta_t + R(m, l) [r(m) - 1] \frac{u_e^2}{2c_p},$$

où $r(m)$ est défini par la formule (5,27).

Le nombre de Nusselt local s'exprimera donc sous la forme :

$$(5,59) \quad \boxed{\mathcal{N}_x \mathcal{R}_x^{-1/2} = \mathcal{F}^{1/3} \frac{3^{2/3} (m+1)^{1/2}}{2^{5/6} \Gamma(1/3)} [f''(\beta; 0)]^{1/3} \frac{R(m, 0)}{R(m, l)}}.$$

Voyons à présent ce que deviennent, lorsque $\mathcal{F}$ croît indéfiniment, les expressions du nombre de Nusselt local dans la première et la seconde approximation. Dans la première approximation, la formule (5,40) reste évidemment inchangée. Dans la seconde, tous les termes en puissances de $\mathcal{F}^{-1/3}$ dans l'expression entre parenthèses de (5,50) deviennent négligeables devant 1, et l'on a :

$$(5,60) \quad \mathcal{N}_{x_2} \mathcal{R}_x^{-1/2} = \mathcal{F}^{1/3} \frac{3^{3/4} (m+1)^{1/2}}{2^{5/4} \Gamma(1/3)} [Q(m)]^{1/4} \frac{R(m, 0)}{R(m, l)} \\ \times \left\{ 1 - \frac{1}{2 \cdot 3^{3/2} \pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2n}{3}} n^2 d_n(m) \frac{\Gamma^2\left(\frac{n}{3}\right) \Gamma\left(\frac{n}{3} + \frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{2n}{3} + 2\right)} \right. \\ \left. \times \frac{\Gamma\left(\frac{n}{3} + \frac{5}{3}\right) \Gamma\left(\frac{9m+1}{3m+3}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{3} + \frac{9m+1}{3m+3}\right)} {}_3F_2\left(\frac{n}{3} + \frac{1}{3}, \frac{n}{3} + 1, \frac{n}{3}; \frac{2n}{3} + 2, \frac{n}{3} + \frac{9m+1}{3m+3}; 1\right) \right\}^{1/2}.$$

On voit, d'après les formules (5,59), (5,40) et (5,60), que l'erreur relative dans le cas de la première et de la seconde approximation ne dépend que de m . Il suffira donc d'étudier le cas où $l = 0$. Nous avons alors :

$$(5,61) \quad \boxed{\mathcal{N}_x \mathcal{R}_x^{-1/2} = \mathcal{F}^{1/3} \frac{3^{2/3} (m+1)^{1/2}}{2^{5/6} \Gamma(1/3)} [f''(\beta; 0)]^{1/3}}.$$

Nous avons porté dans le tableau X les valeurs du terme en $\mathcal{F}^{1/3}$ de la formule (5,61) avec les valeurs du terme correspondant de la première approximation :

TABLEAU X

$m \dots \dots \dots$	— 1/9	— 0,0904	— 0,0654	0	1/9	1/3	1	4	∞
$\beta \dots \dots \dots$	— 0,25	— 0,1988	— 0,14	0	0,20	0,50	1	1,6	2
$N_x R_x^{-1/2} \mathcal{F}^{-1/3}$		0	0,2617	0,3387	0,4052	0,4907	0,6608	1,1207	$0,5188 m^{1/2}$
1 ^{re} approximation ...	0	0,2204	0,2673	0,3316	0,3947	0,4776	0,6430	1,0908	$0,5050 m^{1/2}$
Erreur % ...	+ ∞	2,1	— 2,1	— 2,6	— 2,7	— 2,7	— 2,7	— 2,7	

Lorsque $m = 0$, on a $N_{x_2} R_x^{-1/2} = 0,34488 \mathcal{F}^{1/3}$, d'où une erreur par excès de 1,8 % par rapport à l'expression exacte $0,33872 \mathcal{F}^{1/3}$, au lieu d'une erreur par défaut de 2,1 % dans le cas de la première approximation, où $N_{x_1} R_x^{-1/2} = 0,33165 \mathcal{F}^{1/3}$.

Lorsque $m = 1/3$, on a $N_{x_2} R_x^{-1/2} = 0,50125 \mathcal{F}^{1/3}$, d'où une erreur par excès de 2,1 % par rapport à l'expression exacte $0,49075 \mathcal{F}^{1/3}$ au lieu d'une erreur par défaut de 2,7 % dans le cas de la première approximation, où $N_{x_1} R_x^{-1/2} = 0,47756 \mathcal{F}^{1/3}$.

Bien que la formule (5,61) ne soit valable que pour des nombres de Prandtl élevés, LIGHTHILL a essayé de l'appliquer à des nombres de Prandtl de l'ordre de l'unité.

Dans le tableau XI, se trouvent les valeurs calculées à l'aide de (5,61), lorsque $\mathcal{F} = 1$, ainsi que les valeurs exactes.

TABLEAU XI

$m \dots \dots \dots$	— 1/9	— 0,0904	— 0,0654	0	1/9	1/3	1	4	∞
$\beta \dots \dots \dots$	— 0,25	— 0,1988	— 0,14	0	0,20	0,50	1	1,6	2
Valeurs exactes ...		0,2202	0,2844	0,3321	0,3777	0,4401	0,5704	0,9387	$0,4288 m^{1/2}$
Formule (5,61)		0	0,2617	0,3387	0,4052	0,4907	0,6608	1,1207	$0,5188 m^{1/2}$
Erreur % ..	— 100	— 8,0	2,0	7,3	11,5	15,8	19,4	21	

Sur la planche 3, on voit que *les erreurs relatives sont plus élevées que celles dues à l'emploi de la formule de la première approximation* introduite dans cet exposé. D'autre part, la formule (5,61) conduit à un nombre de Nusselt nul lorsque la tension de frottement est nulle partout, tandis que COHEN et RESHOTKO [3] ont obtenu alors $N_x R_x^{-1/2} = 0,2202$.

5,4 COEFFICIENT DE CONVECTION MOYEN LORSQUE $\theta_p = \theta_t = b r^l$

On voit facilement, d'après la forme du coefficient de convection local, que le nombre de Nusselt moyen est :

$$(5,62) \quad \boxed{N_{xm} R_x^{-1/2} = \frac{2}{2l + m + 1} N_x R_x^{-1/2}},$$

aussi bien pour l'expression exacte que pour les expressions de la première et de la seconde approximation.

Nous ne nous intéresserons donc ci-dessous qu'à la température effective moyenne.

5,41 Première approximation.

La température effective moyenne est donnée par la formule (2,91) qui devient :

$$(5,63) \quad \theta_{em} (m, l; x) = \theta_t + \bar{R} (m, l) (r_1 - 1) \frac{u_e^2}{2 c_p}$$

avec :

$$(5,64) \quad \bar{R} (m, l) = \frac{\Gamma \left(\frac{11m + 3}{3m + 3} \right) \Gamma \left(\frac{4l + 5m + 5}{3m + 3} \right)}{\Gamma \left(\frac{13m + 5}{3m + 3} \right) \Gamma \left(\frac{4l + 3m + 3}{3m + 3} \right)} = \frac{2l + m + 1}{5m + 1} R (m, l).$$

Le facteur thermique pariétal de convection moyen est :

$$(5,65) \quad r_{cm_1} = 1 + (r_1 - 1) \bar{R} (m, l).$$

Il est donc constant le long de la paroi.

Lorsque $l = 0$, la fonction $\bar{R} (m, l)$ devient :

$$(5,66) \quad \bar{R} (m, 0) = \frac{\Gamma (5/3) \Gamma \left(\frac{11m + 3}{3m + 3} \right)}{\Gamma \left(\frac{13m + 5}{3m + 3} \right)} = \frac{m + 1}{5m + 1} R (m, 0),$$

r_{cm_1} diffère toujours de r_1 , sauf si $m = 0$. La courbe représentative de r_{cm_1} en fonction de β , lorsque $\mathcal{F} = 0,7$, a été portée sur la planche 7. On voit qu'à la différence de r_{c_1} , r_{cm_1} est une fonction croissante de β , lorsque le nombre de Prandtl est inférieur à 1. La température d'équilibre tend donc à se rapprocher de la température totale, lorsque m augmente.

La température moyenne de frottement est, par définition :

$$(5,67) \quad \theta_{fm_1} = \frac{1}{x} \int_0^x \theta_{f_1} dx = \theta_t + \frac{(r_1 - 1)}{2m + 1} \cdot \frac{u_e^2}{2 c_p}.$$

On voit, sur la planche 4, que la fonction $1/(2m+1)$ est voisine de la fonction $\bar{R}(m, 0)$ surtout lorsque m est faible.

On vérifie donc, dans le cas particulier où $u_e = cx^m$, que l'on ne fait pas une grande erreur en supposant que la température effective moyenne est égale à la température moyenne de frottement, comme l'avait fait remarquer E. BRUN [32].

5,42 Seconde approximation.

La température effective moyenne est donnée par la formule :

$$(5,68) \quad \theta_{eff_z}(m, l; x) = \theta_t + (r_1 - 1) \frac{2l + m + 1}{5m + 1} \cdot \frac{\alpha_2(m, 2m; x)}{\alpha_2(m, l; x)} \cdot \frac{u_e^2}{2c_p}.$$

Le facteur thermique pariétal de convection moyen sera donc :

$$(5,69) \quad r_{cm_z} = 1 + (r_1 - 1) \frac{2l + m + 1}{5m + 1} \cdot \frac{\alpha_2(m, 2m; x)}{\alpha_2(m, l; x)}.$$

5,43 Nombres de Prandtl élevés.

On trouve, de la même façon, que la température effective moyenne est donnée par la formule :

$$(5,70) \quad \theta_{\overline{eff}}(m, l; x) = \theta_t + [r(m) - 1] \bar{R}(m, l) \frac{u_e^2}{2c_p}.$$

Le facteur thermique pariétal de convection moyen sera donc :

$$(5,71) \quad r_{cm} = 1 + [r(m) - 1] \bar{R}(m, l).$$

CONCLUSION DE LA PREMIÈRE PARTIE

Nous avons présenté dans cette première partie, les résultats de l'intégration approchée des équations de l'impulsion et de l'énergie avec les variables de VON MISES.

Nous avons pu intégrer facilement les équations de l'impulsion dans les deux premières approximations. La tension de frottement pariétale τ_{p_1} est alors la solution d'une équation intégrale, qui est résoluble facilement lorsque $u_e = cx^m$.

L'équation de l'énergie se traite facilement dans le cas de la première approximation. On trouve alors que le *facteur thermique pariétal de frottement correspondant* r_1 est indépendant de la distribution de la vitesse extérieure et que la densité de flux de chaleur à la paroi est donnée par une intégrale de STIELTJES. Dans le cas de la deuxième approximation, nous avons été obligés d'utiliser une hypothèse simplificatrice qui consiste à garder l'expression de r_1 obtenue dans la première approximation. La densité de flux de chaleur à la paroi est donnée par une série de puissances entières de $\mathcal{F}^{-1/3}$ dont les coefficients sont des intégrales de STIELTJES. Les résultats obtenus ne sont donc plus valables lorsque les nombres de Prandtl sont trop faibles.

Les calculs numériques effectués dans certains cas particuliers montrent que l'on obtient, dès la seconde approximation, des valeurs différant de moins de 3 % des valeurs calculées par intégration numérique directe.

Remarquons que ILLINGWORTH [15] avait introduit une linéarisation de l'équation de l'énergie identique à celle de la première approximation, *mais en se limitant au cas où* $\mathcal{F} = 1$. Il n'avait donc pas été en mesure de calculer les facteurs thermiques pariétaux de frottement et de convection, lorsque le nombre de Prandtl est quelconque. D'autre part, il n'a pas cherché à améliorer ses résultats en étudiant l'approximation suivante.

Lorsque le nombre de Prandtl croît indéfiniment, l'équation de l'énergie se simplifie d'une façon analogue à la première approximation. LIGHTHILL avait intégré cette équation dans le cas général, mais en négligeant l'échauffement cinétique. Nous avons réussi à tenir compte de ce terme et à déterminer le facteur thermique pariétal de frottement. Celui-ci est *proportionnel à la racine cubique du nombre de Prandtl* et dépend relativement peu de la distribution de la vitesse extérieure.

DEUXIÈME PARTIE

OBSTACLE BIDIMENSIONNEL OU DE RÉVOLUTION

(Propriétés physiques variables)

INTRODUCTION

Nous allons à présent traiter le cas plus général où les propriétés physiques dépendent de la pression et de la température. Comme ceci est le cas des gaz, la couche limite est alors dite « compressible » par opposition à la couche limite à propriétés physiques constantes, dite « incompressible ».

Nous supposons que le gaz étudié est parfait, mais que sa chaleur spécifique à pression constante est en général fonction de la température absolue. La loi de variation de la viscosité μ en fonction de la température absolue θ ne sera pas imposée *a priori*.

Dans le cas particulier où c_p est constant, $\mathcal{T}$ égal à 1, μ proportionnel à θ et où la paroi de l'obstacle est thermiquement isolée, les équations de la couche limite compressible se ramènent aux équations de la couche limite incompressible. Ceci avait été démontré rigoureusement pour la plaque plane par DORODNITZIN [33] et HOWARTH [34]. Ce résultat a été étendu au cas où la distribution de vitesse extérieure $u_e(x)$ est quelconque par STEWARTSON [35] et ILLINGWORTH [36].

Malheureusement, si l'on abandonne les hypothèses précédentes, les équations de l'impulsion et de l'énergie ne peuvent plus être rendues indépendantes. Nous allons montrer comment on peut étendre à la couche limite compressible la méthode d'intégration approchée introduite dans la première partie. Il faut pour cela opérer certaines simplifications, dont nous chercherons le domaine de validité en comparant les résultats obtenus ainsi avec ceux de solutions plus complètes.

ÉQUATIONS GÉNÉRALES

6,1 ÉQUATIONS DE PRANDTL

Les équations de conservation du débit, des composantes longitudinale et normale de l'impulsion s'expriment, si l'on tient compte du fait que la masse volumique n'est plus constante, sous les formes suivantes :

$$(6,1) \quad \boxed{\frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} = 0} ;$$

$$(6,2) \quad \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) ;$$

$$(6,3) \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0.$$

Ces équations sont valables lorsque la courbure du profil est faible.

L'équation de conservation de l'énergie, dans un écoulement isoénergétique, s'écrit :

$$(6,4) \quad \rho u \frac{\partial h}{\partial x} + \rho v \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) + u \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2.$$

$h = \int_0^\theta c_p d\theta$ est l'enthalpie massique.

Nous devons ajouter à ces quatre équations de conservation, l'équation d'état des gaz parfaits :

$$(6,5) \quad \frac{p}{\rho \theta} = \text{Cte.}$$

Nous avons, d'autre part, les conditions aux limites :

$$(6,6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{y \rightarrow 0} u(x, y) = 0, \\ \lim_{y \rightarrow 0} v(x, y) = 0, \\ \lim_{y \rightarrow 0} h(x, y) = h_p(x) \end{array} \right.$$

et :

$$(6,7) \quad \begin{cases} \lim_{y \rightarrow \infty} u(x, y) = u_e(x), \\ \lim_{y \rightarrow \infty} h(x, y) = h_e(x). \end{cases}$$

Si l'on combine la relation (6,3) avec l'équation d'EULER, on obtient :

$$(6,8) \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dp_e}{dx} = -\rho_e u_e \frac{du_e}{dx}.$$

D'autre part, l'enthalpie d'arrêt est constante à l'extérieur de la couche limite :

$$(6,9) \quad h_e + \frac{u_e^2}{2} = h_t,$$

d'où :

$$(6,10) \quad \frac{dh_e}{dx} = -u_e \frac{du_e}{dx}.$$

Les équations (6,2) et (6,4) deviennent alors, en tenant compte des équations (6,9) et (6,10) :

$$(6,11) \quad \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} - \rho_e u_e \frac{du_e}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right);$$

$$(6,12) \quad \rho u \frac{\partial h}{\partial x} + \rho v \frac{\partial h}{\partial y} = \rho_e u \frac{dh_e}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu}{\mathcal{F}} \cdot \frac{\partial h}{\partial y} \right) + u \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2.$$

6,2

ÉQUATIONS DE VON MISES

Effectuons à présent la transformation de VON MISES que nous avons introduite dans le premier chapitre de la première partie, en tenant compte évidemment du fait que la masse volumique est variable.

Les équations (6,11) et (6,12) prennent la forme :

$$(6,13) \quad \rho u \frac{\partial u}{\partial x} - \rho_e u_e \frac{du_e}{dx} - \rho u \frac{\partial}{\partial \Psi} \left(\mu \rho u \frac{\partial u}{\partial \Psi} \right) = 0;$$

$$(6,14) \quad \rho u \frac{\partial h}{\partial x} - \rho_e u \frac{dh_e}{dx} - \rho u \frac{\partial}{\partial \Psi} \left(\frac{\mu \rho u}{\mathcal{F}} \cdot \frac{\partial h}{\partial \Psi} \right) = \mu \rho^2 u^2 \left(\frac{\partial u}{\partial \Psi} \right)^2.$$

On voit que l'équation de l'impulsion dépend de la solution de l'équation de l'énergie par l'intermédiaire de la viscosité et de la masse volumique. En effet, la loi des gaz parfaits donne :

$$(6,15) \quad \rho = \frac{\rho_e \theta_e}{\theta}.$$

La composante longitudinale u de la vitesse et l'enthalpie h obéissent aux conditions aux limites suivantes :

$$(6,16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} u(x, \Psi) = \lim_{x \rightarrow 0} u_e(x), \\ \lim_{\Psi \rightarrow 0} u(x, \Psi) = 0, \\ \lim_{\Psi \rightarrow \infty} u(x, \Psi) = u_e(x); \end{array} \right.$$

$$(6,17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} h(x, \Psi) = \lim_{x \rightarrow 0} h_e(x), \\ \lim_{\Psi \rightarrow 0} h(x, \Psi) = h_p(x), \\ \lim_{\Psi \rightarrow \infty} h(x, \Psi) = h_e(x). \end{array} \right.$$

6,3 ÉQUATION SIMPLIFIÉE DE L'IMPULSION

Posons à présent :

$$(6,18) \quad \left\{ \begin{array}{l} Z(x, \Psi) = u_e^2(x) - u^2(x, \Psi), \\ T(x, \Psi) = \theta(x, \Psi) - \theta_e(x). \end{array} \right.$$

Introduisons Z et T dans l'équation (6,13), on obtient :

$$(6,19) \quad \boxed{\frac{\partial Z}{\partial x} - u \frac{\partial}{\partial \Psi} \left(\mu \rho \frac{\partial Z}{\partial \Psi} \right) = - \frac{2 u_e}{\theta_e} \cdot \frac{du_e}{dx} T}$$

avec les conditions aux limites :

$$(6,20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} Z(x, \Psi) = 0, \\ \lim_{\Psi \rightarrow 0} Z(x, \Psi) = u_e^2(x), \\ \lim_{\Psi \rightarrow \infty} Z(x, \Psi) = 0. \end{array} \right.$$

T est obtenue à l'aide de l'équation de l'énergie. Nous allons voir comment on peut rendre l'équation de l'impulsion indépendante de l'équation de l'énergie.

Posons :

$$(6,21) \quad \left\{ \begin{array}{l} u = \varepsilon(x) u^*, \\ Z = \varepsilon^2(x) Z^*. \end{array} \right.$$

$\varepsilon(x)$ est une fonction que l'on déterminera plus loin. L'équation (6,19) devient :

$$(6,22) \quad \frac{\partial Z^*}{\partial x} - u \frac{\partial}{\partial \Psi} \left(\mu \rho \frac{\partial Z^*}{\partial \Psi} \right) = - \frac{2 u_e}{\theta_e} \cdot \frac{du_e}{dx} \cdot \frac{T}{\varepsilon^2} - \frac{2}{\varepsilon} \cdot \frac{d\varepsilon}{dx} Z^*.$$

Le second membre de l'équation (6,22) s'annule lorsque Ψ croît indéfiniment. Nous allons choisir $\varepsilon(x)$ de telle façon que ce *second membre s'annule aussi à la paroi*.

Il faut donc que :

$$(6,23) \quad \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{d\varepsilon}{dx} = - \frac{\theta_p - \theta_e}{\theta_e} \cdot \frac{1}{u_e} \cdot \frac{du_e}{dx},$$

$\varepsilon(x)$ sera définie, à une constante multiplicative près, par :

$$(6,24) \quad \varepsilon(x) = C^{te} \exp \left[- \int_0^x \frac{\theta_p - \theta_e}{\theta_e} \cdot \frac{du_e}{u_e} \right].$$

Posons :

$$(6,25) \quad x^* = \int_0^x \frac{\mu_p \rho_p}{\mu_t \rho_t} \varepsilon(x) dx.$$

Nous allons faire à présent deux hypothèses simplificatrices :

a) *le second membre de (6,22) est négligeable*; ce qui est justifié, soit lorsque le gradient de vitesse extérieure est faible, soit lorsque la température de paroi est voisine de la température totale, le nombre de Prandtl étant voisin de 1;

b) μ_p *peut être remplacé par sa valeur à la paroi* $\mu_p \rho_p$; c'est l'hypothèse introduite par CHAPMAN et RUBESIN [7] pour étudier la plaque plane et adoptée par de nombreux auteurs dont COHEN et RESHOTKO [31] pour étudier l'influence du gradient de pression.

L'équation de l'impulsion devient alors :

$$(6,26) \quad \frac{\partial Z^*}{\partial x^*} - \mu_t \rho_t u^* \frac{\partial^2 Z^*}{\partial \Psi^2} = 0.$$

On retombe sur l'équation de l'impulsion *dans une couche limite fictive à propriétés physiques constantes*, avec $\mu^* = \mu_t$ et $\rho^* = \rho_t$.

On peut donc utiliser le processus d'intégration de la première partie et repasser ensuite, grâce à (6,21) et à (6,25), aux grandeurs réelles. Par exemple, les tensions de frottement pariétales dans les deux couches limites seront liées par :

$$6,27 \quad \tau_p = \frac{\mu_p \rho_p}{\mu_t \rho_t} \varepsilon^2(x) \tau_p^*.$$

6,4

ÉQUATION SIMPLIFIÉE DE L'ÉNERGIE

6,41 Posons :

$$(6,28) \quad H(x, \Psi) = h(x, \Psi) - h_e(x).$$

Introduisons Z , T et H dans l'équation (6,14), en supposant, pour simplifier, $\mathcal{F}$ constant :

$$(6,29) \quad \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{1}{\mathcal{F}} \cdot \frac{\partial}{\partial \Psi} \left(\mu \rho u \frac{\partial H}{\partial \Psi} \right) + \frac{u_e}{\theta_e} \cdot \frac{du_e}{dx} \cdot T = - \frac{\mu \rho}{2} \cdot \frac{\partial u}{\partial \Psi} \cdot \frac{\partial Z}{\partial \Psi}$$

avec les conditions aux limites :

$$(6,30) \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} H(x, \Psi) = 0, \\ \lim_{\Psi \rightarrow 0} H(x, \Psi) = h_p(x) - h_e(x), \\ \lim_{\Psi \rightarrow \infty} H(x, \Psi) = 0. \end{cases}$$

Effectuons les changements de variables (6,21) et (6,25) et utilisons l'hypothèse simplificatrice $\mu \rho = \mu_p \rho_p$:

$$(6,31) \quad \begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x^*} - \frac{\mu_t \rho_t}{\mathcal{F}} \cdot \frac{\partial}{\partial \Psi} \left(u^* \frac{\partial H}{\partial \Psi} \right) + \frac{\mu_t \rho_t}{\mu_p \rho_p} \cdot \frac{1}{\varepsilon(x)} \cdot \frac{u_e}{\theta_e} \cdot \frac{du_e}{dx} T \\ = - \frac{\mu_t \rho_t}{2} \varepsilon^2(x) \frac{\partial u^*}{\partial \Psi} \cdot \frac{\partial Z^*}{\partial \Psi}, \end{aligned}$$

6,42 Nous allons à présent examiner dans quels cas on peut ne pas tenir compte du terme proportionnel à T . La solution de cette équation peut être considérée comme la somme de la solution particulière $(H)_f$, correspondant à $\Phi_p = 0$, de l'équation complète :

$$(6,32) \quad \begin{aligned} \frac{\partial (H)_f}{\partial x^*} - \frac{\mu_t \rho_t}{\mathcal{F}} \cdot \frac{\partial}{\partial \Psi} \left(u^* \frac{\partial (H)_f}{\partial \Psi} \right) + \frac{\mu_t \rho_t}{\mu_p \rho_p} \cdot \frac{1}{\varepsilon(x)} \cdot \frac{u_e}{\theta_e} \cdot \frac{du_e}{dx} (T)_f \\ = - \frac{\mu_t \rho_t}{2} \varepsilon^2(x) \frac{\partial u^*}{\partial \Psi} \cdot \frac{\partial Z^*}{\partial \Psi}. \end{aligned}$$

avec les conditions aux limites :

$$(6,33) \quad \begin{cases} \lim_{x^* \rightarrow 0} (H)_f = 0, \\ \lim_{\Psi \rightarrow 0} \Psi^{1/2} \frac{\partial (H)_f}{\partial \Psi} = 0, \\ \lim_{\Psi \rightarrow \infty} (H)_f = 0; \end{cases}$$

et de la solution générale $\bar{H}$ de l'équation sans second membre :

$$(6,34) \quad \frac{\partial \bar{H}}{\partial x^*} - \frac{\mu_t \rho_t}{\mathcal{F}} \cdot \frac{\partial}{\partial \Psi} \left(u^* \frac{\partial \bar{H}}{\partial \Psi} \right) + \frac{\mu_t \rho_t}{\mu_p \rho_p} \cdot \frac{1}{\varepsilon(x)} \cdot \frac{u_e}{\theta_e} \cdot \frac{du_e}{dx} \cdot \bar{T} = 0$$

avec les conditions aux limites :

$$(6,35) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x^* \rightarrow 0} \bar{H} = 0, \\ \lim_{\Psi \rightarrow 0} \bar{H} = h_p(x^*) - h_f(x^*), \\ \lim_{\Psi \rightarrow \infty} \bar{H} = 0. \end{array} \right.$$

h_f est l'enthalpie de frottement obtenue à partir de l'intégration de (6,32) avec les conditions (6,33).

6,43 Paroi thermiquement isolée.

Posons :

$$(6,36) \quad (H)_f = \varepsilon^2(x) (H^*)_f.$$

L'équation (6,32) devient en remplaçant dans la relation (6,24) θ_p par θ_f :

$$(6,37) \quad \frac{\partial (H^*)_f}{\partial x^*} - \frac{\mu_t \rho_t}{\mathcal{F}} \cdot \frac{\partial}{\partial \Psi} \left(u^* \frac{\partial (H^*)_f}{\partial \Psi} \right) - \frac{2}{u_e} \cdot \frac{du_e}{dx^*} \cdot \left[\frac{\theta_f - \theta_e}{\theta_e} (H^*)_f \right. \\ \left. - \frac{u_e^2}{2 \theta_e} \cdot \frac{(T)_f}{\varepsilon^2(x)} \right] = - \frac{\mu_t \rho_t}{2} \cdot \frac{\partial u^*}{\partial \Psi} \cdot \frac{\partial Z^*}{\partial \Psi}.$$

Nous allons à présent *négliger dans l'équation (6,37) le troisième terme du premier membre*. Comme ce terme est égal, à la paroi, à :

$$- \frac{2}{u_e} \cdot \frac{du_e}{dx^*} \cdot \frac{h_f - h_t}{\theta_e} \cdot \frac{\theta_f - \theta_e}{\varepsilon^2(x)},$$

cette hypothèse est acceptable lorsque le nombre de Prandtl est voisin de 1, ce qui est le cas des gaz. Nous aurons donc :

$$(6,38) \quad \boxed{\frac{\partial (H^*)_f}{\partial x^*} - \frac{\mu_t \rho_t}{\mathcal{F}} \cdot \frac{\partial}{\partial \Psi} \left(u^* \frac{\partial (H^*)_f}{\partial \Psi} \right) = - \frac{\mu_t \rho_t}{2} \cdot \frac{\partial u^*}{\partial \Psi} \cdot \frac{\partial Z^*}{\partial \Psi}}.$$

L'équation (6,38) est analogue à l'équation correspondante *dans une couche limite fictive* où $\mu^* = \mu_t$, $\rho^* = \rho_t$ et $\mathcal{F}^* = \mathcal{F}$, mais où l'on a remplacé $c_p (T^*)_f$ par $(H^*)_f$. On peut donc l'intégrer à l'aide du processus d'intégration de la première partie, et calculer alors le *facteur enthalpique pariétal de frottement* :

$$(6,39) \quad r_h = \frac{h_f - h_e}{h_t - h_e},$$

qui se ramène au facteur thermique pariétal de frottement, lorsque c_p est constant.

Dans le cas de la première approximation, r_{h_1} est égal à la fonction r ($\mathcal{F}$) définie au paragraphe 2,21. Le facteur enthalpique pariétal, non seulement est indépendant du gradient de pression, mais encore, *est indépendant du nombre de Mach de l'écoulement à l'infini amont.*

6,44 Équation sans second membre.

Nous allons *négliger dans l'équation (6,34) le terme proportionnel à $\bar{T}$.* Comme ce terme est égal, à la paroi, à :

$$\frac{\mu_t \rho_t}{\mu_p \rho_p} \cdot \frac{1}{\varepsilon(x)} \cdot \frac{u_e^2}{M_e} \cdot \frac{dM_e}{dx} \cdot \frac{\theta_p - \theta_f}{\theta_t},$$

cette hypothèse est acceptable, lorsque :

- a) soit dM_e/dx est faible (obstacles peu épais à incidence peu élevée);
- b) soit M_e est élevé (écoulements hypersoniques);
- c) soit $\theta_p - \theta_f$ est faible.

L'équation (6,34) devient :

$$(6,40) \quad \boxed{\frac{\partial \bar{H}}{\partial x^*} - \frac{\mu_t \rho_t}{\mathcal{F}} \cdot \frac{\partial}{\partial \Psi} \left(u^* \frac{\partial \bar{H}}{\partial \Psi} \right) = 0}.$$

Elle est analogue à l'équation de l'énergie sans second membre *dans une autre couche limite fictive que celle du paragraphe précédent.*

L'équation (6,40) peut s'intégrer à l'aide du processus d'intégration de la première partie. On obtiendra ainsi les expressions de $\Phi_p^* = - \frac{\lambda_t}{c_p (\theta_p)} \left(\frac{\partial \bar{h}}{\partial y^*} \right)_p$ sous la forme d'intégrales de STIELTJES. On reviendra ensuite à la densité de flux de chaleur pariétale réelle grâce à la formule :

$$(6,41) \quad \boxed{\Phi_p = \frac{\mu_p \rho_p}{\mu_t \rho_t} \varepsilon(x) \Phi_p^*}.$$

Par exemple, dans le cas de la première approximation, on a :

$$(6,42) \quad \boxed{\Phi_{p_1} = \frac{3^{1/3}}{\Gamma(1/3)} \cdot \frac{\mu_p \rho_p}{(\mu_t \rho_t)^{2/3}} \varepsilon(x) \mathcal{F}^{-2/3} [\tau_{p_1}^*(x^*)]^{1/2} \times \int_0^{x^*} \left(\int_{x^{*'}}^x [\tau_{p_1}^*(x^{*''})]^{1/2} dx^{*''} \right)^{-1/3} d[h_p(x^{*'}) - h_{f_1}(x^{*'})]}$$

On peut définir, comme dans la première partie, des enthalpies effectives locales h_{eff} et des coefficients de convection locaux :

$$(6,43) \quad \alpha = \frac{c_p (\theta_p) \Phi_p}{h_p - h_{eff}}.$$

Mais lorsque h_p est de la forme $h_t + a P(x)$, h_{eff} et α ne sont plus indépendants du paramètre a , c'est-à-dire de la valeur absolue de la température de paroi. Leur considération est utile pour former des expressions sans dimensions, comme le nombre de Nusselt local :

$$(6,44) \quad \mathcal{N}_x = \frac{c_p (\theta_p) \Phi_p x}{\lambda_e (h_p - h_{eff})} = \frac{\alpha x}{\lambda_e}.$$

ÉTUDE DE LA NOUVELLE TRANSFORMATION

7,1

FORMULES DE TRANSFORMATION

Nous avons vu dans le sixième chapitre, que l'on pouvait ramener les équations de la couche limite compressible aux équations d'une couche limite incompressible fictive.

Pour cela, il faut négliger dans les équations de l'impulsion et de l'énergie les deux termes proportionnels au gradient de pression et *adopter en plus l'hypothèse de calcul de CHAPMAN et RUBESIN*, c'est-à-dire remplacer le produit $\rho\mu$ par la valeur $\rho_p\mu_p$ qu'il prend à la paroi.

Rappelons les formules de transformation :

$$(7,1) \quad \begin{cases} x^* = \int_0^x \frac{\mu_p \rho_p}{\mu_t \rho_t} \varepsilon(x) dx, \\ y^* = \varepsilon(x) \int_0^y \frac{\rho}{\rho_t} dy, \\ u^* = u/\varepsilon(x) \end{cases}$$

avec :

$$(7,2) \quad \varepsilon(x) = \text{Cte} \exp \left[- \int_0^x \frac{\theta_p - \theta_e}{\theta_e} \cdot \frac{du_e}{u_e} \right].$$

La deuxième formule du système (7,1) est obtenue en remarquant que $\Psi^* = \Psi$.

Nous allons examiner ce que deviennent ces formules de transformation dans deux cas particuliers d'une grande importance physique.

7,2

PAROI THERMIQUEMENT ISOLÉE

7,21 Lorsque c_p est constant, nous pouvons avoir une expression plus simple de $\varepsilon(x)$ en prenant pour valeur de la température de frottement celle obtenue en première approximation.

En effet :

$$\int_0^x \frac{\theta_{f1} - \theta_e}{\theta_e} \cdot \frac{du_e}{u_e} = -\frac{r_1}{2} [\text{Log } \theta_e(x) - \text{Log } \theta_e(0)].$$

En choisissant convenablement la constante dans la formule (7,2), nous poserons :

$$(7,4) \quad \varepsilon(x) = \left(\frac{\theta_e}{\theta_t} \right)^{r_1/2}.$$

Cette expression a pour avantage qu'au voisinage du point d'arrêt, la couche limite compressible se raccorde à la couche limite incompressible transformée.

Les formules de transformation seront donc :

$$(7,5) \quad \left. \begin{aligned} x^* &= \int_0^x \frac{\mu_f \theta_t}{\mu_t \theta_f} \left(\frac{\theta_e}{\theta_t} \right)^{\gamma-1+\frac{r_1}{2}} dx \\ y^* &= \left(\frac{\theta_e}{\theta_t} \right)^{r_1/2} \int_0^y \frac{\rho}{\rho_t} dy \\ u^* &= u \left(\frac{\theta_t}{\theta_e} \right)^{r_1/2} \\ h^* &= h \left(\frac{\theta_t}{\theta_e} \right)^{r_1} \end{aligned} \right\}.$$

γ est le rapport des chaleurs spécifiques.

Lorsque $\mathcal{F} = 1$, ces formules se ramènent à celles de la transformation de COHEN et RESHOTKO, puisque alors $r_1 = 1$. Si, de plus, l'on suppose que *la viscosité est proportionnelle à la température absolue*, on obtient la transformation d'ILLINGWORTH-STEWARTSON.

7,22 Les trois premières formules de transformation (7,5) avaient déjà été obtenues par différents auteurs, en utilisant non plus les équations différentielles de l'impulsion et de l'énergie, mais l'équation globale de la quantité de mouvement :

$$(7,6) \quad \frac{d\delta_2}{dx} + [\delta_1 + \delta_2 (2 - M_e^2)] \frac{1}{u_e} \cdot \frac{du_e}{dx} = \frac{\tau_p}{\rho_e u_e^2} ;$$

où :

$$\delta_1 = \int_0^\infty \left(1 - \frac{\rho u}{\rho_e u_e} \right) dy$$

et :

$$\delta_2 = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{u_e} \right) \frac{\rho u}{\rho_e u_e} dy$$

sont respectivement les épaisseurs de déplacement et de quantité de mouvement.

Il faut, pour pouvoir ramener l'équation (7,6) à l'équation correspondante de la couche limite incompressible, employer des lois hypothétiques de température généralisant la loi de température valable pour $\mathcal{F} = 1$:

$$(7,7) \quad \theta = \theta_e + \frac{u_e^2}{2c_p} \left(1 - \frac{u^2}{u_e^2} \right).$$

ROTT [37] avait supposé que l'on avait :

$$(7,8) \quad \theta = \theta_e + r \frac{u_e^2}{2 c_p} \left(1 - \frac{u^2}{u_e^2} \right).$$

TANI [38] avait utilisé une autre loi hypothétique :

$$(7,9) \quad \theta = \theta_e + \frac{u_e^2}{2 c_p} \left[r \left(1 - \frac{u^2}{u_e^2} \right) + (1 - r) \Phi(x, y) \right],$$

la fonction $\Phi(x, y)$ satisfaisant aux conditions suivantes :

$$(7,10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{y \rightarrow 0} \Phi(x, y) = 0, \\ \lim_{y \rightarrow \infty} \Phi(x, y) = 0, \\ \int_0^\infty \rho u \Phi dy = \int_0^\infty \rho u \left(1 - \frac{u^2}{u_e^2} \right) dy. \end{array} \right.$$

L'auteur [39] avait utilisé une loi de la forme :

$$(7,11) \quad \theta = \theta_e + \frac{r u_e^2}{2 c_p} \cdot \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial y^*} \left[1 - g^2(x^*, f(x^*, y^*)) \right],$$

la fonction :

$$g(x^*, y^*) = \frac{u^*}{u_e^*} = \frac{u}{u_e}$$

étant solution de l'équation de l'impulsion à propriétés physiques constantes.

La fonction $f(x^*, y^*)$ est une fonction analytique croissante de y^* qui doit satisfaire aux conditions aux limites suivantes :

$$(7,12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{y^* \rightarrow 0} f(x^*, y^*) = 0, \\ \lim_{y^* \rightarrow 0} \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial y^*} = 1, \\ \lim_{y^* \rightarrow \infty} f(x^*, y^*) = \infty. \end{array} \right.$$

Si l'on impose à la vitesse u et à la température θ de satisfaire à la paroi aux équations de l'impulsion (6,11) et de l'énergie (6,12), ainsi qu'à leurs dérivées successives, on pourra calculer les valeurs que prennent à la paroi les dérivées partielles successives de $f(x^*, y^*)$. Le développement limité de $f(x^*, y^*)$ en puissances de y^* sera donné, jusqu'au quatrième ordre inclus, par :

$$(7,13) \quad \begin{aligned} f(x^*, y^*) = & y^* + \frac{y^{*3}}{3} \left(1 - \frac{\mathcal{F}}{r} \right) \left[\frac{\partial g}{\partial y^*}(x^*, 0) \right]^2 \\ & + \frac{y^{*4}}{12} \left[3 \left(1 - \frac{\mathcal{F}}{r} \right) + \frac{\mathcal{F}}{r} (1 - r) \frac{\theta_e}{\theta_r} \right] \frac{\partial g}{\partial y^*}(x^*, 0) \frac{\partial^2 g}{\partial y^{*2}}(x^*, 0) + 0(y^{*5}). \end{aligned}$$

La loi hypothétique (7,11) permet alors à la vitesse u de satisfaire à l'équation de l'impulsion jusqu'à la dérivée seconde incluse. Par contre, la température θ satisfera à l'équation de l'énergie jusqu'à la dérivée troisième incluse.

Dans la référence [39], nous avons montré que le profil de vitesses sur une plaque plane ($M_e = 1,85$) calculé à l'aide de (7,11) et de (7,13) est pratiquement confondu avec celui obtenu par PLAN [10] en utilisant la méthode d'intégration numérique de CHAPMAN et RUBESIN.

7,3

PAROI A TEMPÉRATURE UNIFORME

La fonction $\varepsilon(x)$ prend également une forme simple, lorsque c_p est constant.

En effet :

$$(7,14) \quad \int_0^x \frac{\theta_p - \theta_e}{\theta_e} \cdot \frac{du_e}{u_e} = (k-1) \text{Log} \left(u_e(x)/u_e(0) \right) - \frac{k}{2} \text{Log} \left(\theta_e(x)/\theta_e(0) \right),$$

où k est le rapport de la température de paroi à la température totale.

La forme générale de $\varepsilon(x)$ sera donc :

$$(7,15) \quad \varepsilon(x) = \left(\frac{u_e}{u_r} \right)^{1-k} \left(\frac{\theta_e}{\theta_t} \right)^{k/2},$$

où u_r est une vitesse de référence, qui joue le rôle de la constante de la formule (7,2).

Les formules de transformation (7,1) deviennent :

$$(7,16) \quad \begin{cases} x^* = \frac{\mu_p \theta_t}{\mu_t \theta_p} \int_0^x \frac{P_e}{P_t} \left(\frac{\theta_e}{\theta_t} \right)^{k/2} \left(\frac{u_e}{u_r} \right)^{1-k} dx, \\ y^* = \left(\frac{u_e}{u_r} \right)^{1-k} \left(\frac{\theta_e}{\theta_t} \right)^{k/2} \int_0^y \frac{\rho}{\rho_t} dy, \\ u^* = \left(\frac{u_r}{u_e} \right)^{1-k} \left(\frac{\theta_t}{\theta_e} \right)^{k/2} u. \end{cases}$$

CHAPITRE VIII

APPLICATION AU CAS OU $u_e^* = c' x^{*m'}$ AVEC θ_p UNIFORME ET $\mathcal{F} = 1$

8,1

CALCULS DE COHEN ET RESHOTKO

Pour voir si la nouvelle transformation, bien qu'approchée, permet d'obtenir des résultats voisins de la réalité, nous allons examiner un cas où les équations de la couche limite compressible ont été intégrées exactement (*avec c_p constant*).

COHEN et RESHOTKO [31], *tout en se plaçant encore dans le cas où $\mathcal{F} = 1$* , ont introduit une modification de la transformation d'ILLINGWORTH-STEWARTSON. Leur transformation qui est basée sur l'hypothèse de calcul de CHAPMAN et RUBESIN, est donnée par les formules :

$$(8,1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{x} = \int_0^x \frac{\mu_p \theta_t}{\mu_t \theta_p} \left(\frac{\theta_e}{\theta_t} \right)^{\frac{3\gamma-1}{2(\gamma-1)}} dx, \\ \tilde{y} = \left(\frac{\theta_e}{\theta_t} \right)^{1/2} \int_0^y \frac{\rho}{\rho_t} dy, \\ \tilde{u} = u \left(\frac{\theta_t}{\theta_e} \right)^{1/2}. \end{array} \right.$$

Le signe tilde désigne les grandeurs transformées, qui n'obéissent aux équations de la couche limite à propriétés physiques constantes, que lorsque la paroi est thermiquement isolée, c'est-à-dire lorsque $\theta_p = \theta_f = \theta_t$.

Dans le cas général d'une température de paroi uniforme, mais différente de θ_t , COHEN et RESHOTKO ont montré que les équations (6,11) et (6,12) pouvaient se ramener à des équations différentielles très simples, à condition que l'on ait $\tilde{u}_e = c \tilde{x}^m$.

Posons :

$$(8,2) \quad \frac{u}{u_e} = \frac{\tilde{u}}{\tilde{u}_e} = f'(\beta, k; \tilde{\eta})$$

ou :

$$\Psi = \varrho_t \sqrt{\frac{2 v_t \tilde{u}_e \tilde{x}}{m+1}} f(\beta, k; \tilde{\eta})$$

et :

$$(8,3) \quad s(\beta, k; \tilde{\eta}) = \frac{\theta - \theta_t}{\theta_t} + \frac{u^2}{2 c_p \theta_t}$$

avec :

$$(8,4) \quad \tilde{\eta} = \tilde{y} \sqrt{\frac{m+1}{2} \cdot \frac{\tilde{u}_e}{v_t} \tilde{x}}$$

et :

$$(8,5) \quad \beta = \frac{2m}{m+1},$$

k étant, comme au paragraphe 7,3, le rapport de la température de paroi à la température totale.

Les équations (6,11) et (6,12) deviennent :

$$(8,6) \quad \left\{ \begin{array}{l} f''' + f f'' + \beta (1 + s - f'^2) = 0 \\ s'' + f s' = 0 \end{array} \right. ,$$

Les conditions aux limites auxquelles obéissent les fonctions $f(\beta, k; \tilde{\eta})$ et $s(\beta, k; \tilde{\eta})$ sont :

$$(8,7) \quad f(\beta, k; 0) = f'(\beta, k; 0) = 0; \quad s(\beta, k; 0) = k - 1;$$

$$(8,8) \quad \lim_{\tilde{\eta} \rightarrow \infty} f'(\beta, k; \tilde{\eta}) = 1; \quad \lim_{\tilde{\eta} \rightarrow \infty} s(\beta, k; \tilde{\eta}) = 0.$$

On peut donc intégrer numériquement les équations de la couche limite lorsque le nombre de Mach M_e à l'extérieur de la couche limite est une fonction paramétrique de x de la forme :

$$(8,9) \quad \left\{ \begin{array}{l} M_e = \frac{c}{a_t} \tilde{x}^m, \\ x = \frac{\mu_t \theta_p}{\mu_p \theta_t} \int_0^{\tilde{x}} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} \cdot \frac{c^2}{a_t^2} \tilde{x}^{2m} \right)^{\frac{3\gamma-1}{2(\gamma-1)}} d\tilde{x}, \end{array} \right.$$

$a = \sqrt{(\gamma - 1) c_p \theta}$ étant la célérité du son dans le gaz.

L'intégrale se calcule facilement lorsque :

$$\gamma = \frac{2N+3}{2N+1},$$

ce qui est bien vérifié par les gaz, où N est le nombre d'atomes dans la molécule.

Si l'on pose :

$$(8,10) \quad \tilde{C}_f = \frac{2 \tilde{\tau}_p}{\rho_t \tilde{u}_e^2} \quad \text{et} \quad \tilde{R}_x = \frac{\tilde{u}_e \tilde{x}}{\nu_t},$$

on aura :

$$(8,11) \quad \tilde{C}_f \tilde{R}_x^{1/2} = 2^{1/2} (m+1)^{1/2} f''(\beta, k; 0).$$

Comme :

$$(8,12) \quad \tau_p = \frac{\mu_p \theta_t}{\mu_t \theta_p} \cdot \left(\frac{\theta_e}{\theta_t} \right)^{2\gamma-1} \tilde{\tau}_p,$$

le coefficient de frottement local dans la couche limite compressible sera égal à :

$$(8,13) \quad C_f = \frac{2 \tau_p}{\rho_e u_e^2} = \frac{\mu_p \theta_t}{\mu_t \theta_p} \tilde{C}_f.$$

La densité de flux de chaleur à la paroi est :

$$(8,14) \quad \Phi_p = -\lambda_p \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)_p = -\lambda_p \theta_t s'(\beta, k; 0) \left(\frac{\theta_e}{\theta_t} \right)^{1/2} \frac{\rho_p}{\rho_t} \sqrt{\frac{m+1}{2}} \cdot \frac{\tilde{u}_e}{\nu_t \tilde{x}}.$$

Le nombre de Nusselt local dans la couche limite compressible est :

$$(8,15) \quad N_x = \frac{\alpha x}{\lambda_e} = \frac{\Phi_p x}{\lambda_e (\theta_p - \theta_t)}$$

ou :

$$(8,16) \quad N_x = -\frac{s'(\beta, k; 0)}{s(\beta, k; 0)} \cdot \frac{x}{\tilde{x}} \cdot \frac{\mu_p \theta_e}{\mu_e \theta_p} \left(\frac{\theta_e}{\theta_t} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \sqrt{\frac{m+1}{2}} \cdot \tilde{R}_x^{1/2}.$$

8,2 APPLICATION DE LA NOUVELLE TRANSFORMATION

Nous allons voir à présent si la nouvelle transformation définie dans le chapitre vi peut s'appliquer à la distribution de nombre de Mach $M_e(x)$ exprimée par les formules paramétriques (8,9).

Nous obtenons :

$$(8,17) \quad u_e^* = c' x^{*m'}$$

avec :

$$(8,18) \quad c' = c \left(\frac{c}{u_r} \right)^{\frac{(m+1)(k-1)}{m(1-k)+1}}$$

et :

$$(8,19) \quad m' = \frac{km}{m(1-k) + 1}.$$

On se ramène donc aux équations de la couche limite à propriétés physiques constantes, dans le cas dit des dièdres.

Posons :

$$(8,20) \quad \frac{u}{u_e} = \frac{u^*}{u_e^*} = f'(\beta', 1; \eta^*) \quad \text{ou} \quad \Psi = \rho_t \sqrt{\frac{2\nu_t u_e^* x^*}{m' + 1}} f(\beta', 1; \eta^*)$$

et :

$$(8,21) \quad s(\beta', 1; \eta^*) = \frac{\theta - \theta_t}{\theta_t} + \frac{u^2}{2c_p \theta_t}$$

avec :

$$(8,22) \quad \eta^* = y^* \sqrt{\frac{m' + 1}{2} \cdot \frac{u_e^*}{\nu_t x^*}}$$

et :

$$(8,23) \quad \beta' = \frac{2m'}{m' + 1} = \beta k.$$

Les équations de l'impulsion et de l'énergie dans la couche limite incompressible transformée deviennent :

$$(8,24) \quad \begin{cases} f''' + ff'' + \beta'(1 - f'^2) = 0, \\ s'' + fs' = 0. \end{cases}$$

Les fonctions $f(\beta', 1; \eta^*)$ et $s(\beta', 1; \eta^*)$ obéiront aux conditions aux limites :

$$(8,25) \quad f(\beta', 1; 0) = f'(\beta', 1; 0) = 0; \quad s(\beta', 1; 0) = k - 1;$$

$$(8,26) \quad \lim_{\eta^* \rightarrow \infty} f'(\beta', 1; \eta^*) = 1; \quad \lim_{\eta^* \rightarrow \infty} s(\beta', 1; \eta^*) = 0.$$

Le coefficient de frottement local dans la couche limite transformée est :

$$(8,27) \quad C_f^* = \frac{2}{\rho_t} \frac{\tau_p^*}{u_e^{*2}} = 2^{1/2} (m' + 1)^{1/2} f''(\beta', 1; 0) \mathcal{R}_x^{*1/2}$$

avec :

$$\mathcal{R}_x^* = \frac{u_e^* x^*}{\nu_t}.$$

Comme :

$$(8,28) \quad \tau_p = \frac{\mu_p \rho_p}{\mu_t \rho_t} \left(\frac{u_e}{u_p} \right)^{2(1-k)} \left(\frac{\theta_e}{\theta_t} \right)^k \tau_p^*,$$

le coefficient de frottement local dans la couche limite compressible sera donné *par la formule approchée* :

$$(8,29) \quad C_f = 2^{1/2} \frac{\mu_p \theta_t}{\mu_t \theta_p} (m+1)^{1/2} f''(\beta k, 1; 0) \tilde{\mathcal{R}}_x^{-1/2}.$$

au lieu de la valeur exacte :

$$(8,30) \quad 2^{1/2} \frac{\mu_p \theta_t}{\mu_t \theta_p} (m+1)^{1/2} f''(\beta, k; 0) \tilde{\mathcal{R}}_x^{-1/2}.$$

De même :

$$(8,31) \quad \Phi_p = \frac{\mu_p \rho_p}{\mu_t \rho_t} \left(\frac{u_e}{u_r} \right)^{1-k} \left(\frac{\theta_e}{\theta_t} \right)^{k/2} \Phi_p^*.$$

Le nombre de Nusselt local dans la couche limite compressible sera donné *par la formule approchée* :

$$(8,32) \quad \mathcal{N}_x = - \frac{\mu_p \theta_t}{\mu_t \theta_p} \left(\frac{m+1}{2} \right)^{1/2} \frac{s'(\beta k, 1; 0)}{s(\beta k, 1; 0)} \tilde{\mathcal{R}}_x^{1/2}$$

au lieu de la valeur exacte :

$$(8,33) \quad - \frac{\mu_p \theta_t}{\mu_t \theta_p} \left(\frac{m+1}{2} \right)^{1/2} \frac{s'(\beta, k; 0)}{s(\beta, k; 0)} \mathcal{R}_x^{1/2}.$$

Nous avons porté, sur les planches 8 et 9, les courbes représentatives des expressions $\tilde{C}_f \tilde{\mathcal{R}}_x^{1/2}/(m+1)^{1/2}$ et $\tilde{\mathcal{N}}_x \tilde{\mathcal{R}}_x^{-1/2}/(m+1)^{1/2}$ calculées à l'aide des formules approchées (8,29) et (8,32), ainsi que les points correspondants aux calculs exacts de COHEN et RESHOTKO.

Lorsque $k = 1$, on a évidemment les mêmes courbes. Lorsque $k > 1$, les formules approchées ne sont valables que lorsque $\beta < 2/k$.

Pour $k = 2$ et 0,6, les points exacts sont *extrêmement voisins des courbes approchées*.

Lorsque $k = 0,2$, les courbes approchées sont en-dessous des courbes exactes; et lorsque $k = 0$, on a alors des horizontales tandis que les courbes exactes sont encore légèrement croissantes. On remarquera que cela concorde avec le fait que les hypothèses simplificatrices introduites aux paragraphes 6,3 et 6,4 ne sont valables que si $h_t - h_p$ est faible.

CONVECTION SUR UN OBSTACLE DE RÉVOLUTION ARRONDI A TEMPÉRATURE DE PAROI UNIFORME

9,1 TRANSFORMATION DE MANGLER

On sait que l'on peut ramener les équations de la couche limite sur un obstacle de révolution aux équations de la couche limite sur un obstacle bidimensionnel fictif grâce à la transformation de coordonnées de MANGLER [41].

Soient x l'abscisse curviligne le long d'un méridien et $r(x)$ la distance d'un point de la surface à l'axe de révolution, nous aurons :

$$(9,1) \quad \begin{cases} \hat{x} = \frac{1}{L^2} \int_0^x r^2(x) dx, \\ \hat{y} = \frac{r(x)}{L} y. \end{cases}$$

Les coordonnées dans la couche limite sur l'obstacle bidimensionnel seront surmontées d'un accent circonflexe. L est une longueur arbitraire. Les vitesses, les températures et les grandeurs physiques du fluide sont invariantes dans la transformation.

9,2 DENSITÉ DE FLUX DE CHALEUR A LA PAROI

9.21 Passons de la couche limite bidimensionnelle à propriétés physiques variables à une couche limite bidimensionnelle à propriétés physiques constantes grâce à la transformation définie par le système (7,16), et correspondant à une température de paroi uniforme. *Combinons-la avec la transformation de MANGLER*, nous aurons enfin :

$$(9,2) \quad \begin{cases} x^* = \frac{\mu_p \theta_t}{\mu_t \theta_p} \cdot \frac{1}{L^2} \int_0^x \frac{p_e}{p_t} \left(\frac{\theta_e}{\theta_t} \right)^{k/2} \left(\frac{u_e}{u_r} \right)^{1-k} r^2 dx, \\ y^* = \frac{r}{L} \left(\frac{u_e}{u_r} \right)^{1-k} \left(\frac{\theta_e}{\theta_t} \right)^{k/2} \int_0^y \frac{\rho}{\rho_t} dy, \\ u^* = \left(\frac{u_r}{u_e} \right)^{1-k} \left(\frac{\theta_t}{\theta_e} \right)^{k/2} u. \end{cases}$$

La densité de flux de chaleur à la paroi de l'obstacle de révolution est donnée par la formule :

$$(9,3) \quad \Phi_p = \frac{\mu_p \varrho_p}{\mu_t \varrho_t} \left(\frac{u_e}{u_r} \right)^{1-k} \left(\frac{\theta_e}{\theta_t} \right)^{k/2} \frac{r}{L} \Phi_p^*,$$

où $\Phi_p^*(x^*)$ est calculée à l'aide de la distribution de vitesse $u^*(x^*)$ à l'extérieur de la couche limite bidimensionnelle à propriétés physiques constantes.

9.22 Lorsque $\theta_p = \theta_t$, c'est-à-dire $k = 1$, on obtient :

$$(9,4) \quad \left\{ \begin{array}{l} x^* = \frac{1}{L^2} \int_0^x \frac{p_e}{p_t} \left(\frac{\theta_e}{\theta_t} \right)^{1/2} r^2 dx, \\ y^* = \frac{r}{L} \left(\frac{\theta_e}{\theta_t} \right)^{1/2} \int_0^y \frac{\varrho}{\varrho_t} dy, \\ u^* = \left(\frac{\theta_t}{\theta_e} \right)^{1/2} u. \end{array} \right.$$

Au voisinage du point d'arrêt $r \sim x$ et $M_e \sim \frac{cx}{a_t}$, $c = (du_e/dx)_{x=0}$ étant fonction du nombre de Mach M_∞ à l'infini amont.

On a donc :

$$u_e^* \sim 3^{1/3} \gamma L^{2/3} x^{*1/3}.$$

On se ramène ainsi au cas $m = 1/3$ étudié dans le chapitre v. Cette méthode de calcul de Φ_p a été utilisée pour la première fois par E. BRUN et VASSEUR [30]. Les calculs postérieurs de SIBULKIN [29] opérant directement sur les équations de la couche limite au point d'arrêt de révolution, lorsque les propriétés physiques peuvent être considérées comme constantes, concordent avec ceux de E. BRUN et VASSEUR.

9.23 Lorsque θ_p est très faible devant θ_t , on peut pour simplifier, remplacer k par 0 dans le système (9,2). La troisième formule du système montre que la *vitesse extérieure* u_e^* dans la couche limite transformée est alors constante :

$$u_e^* = u_r.$$

On a alors :

$$(9,5) \quad \left\{ \begin{array}{l} x^* = \frac{\mu_p \theta_t}{\mu_t \theta_p} \cdot \frac{1}{L^2} \int_0^x \frac{p_e}{p_t} \cdot \frac{u_e}{u_r} r^2 dx, \\ y^* = \frac{r}{L} \cdot \frac{u_e}{u_t} \int_0^y \frac{\varrho}{\varrho_t} dy, \end{array} \right.$$

Φ_p^* est donc donné par la formule de la plaque plane :

$$(9,6) \quad \Phi_p^*(x) = \frac{Y'_0(0, 1; \mathcal{F}; 0)}{2^{1/2} \mathcal{F}} \frac{\lambda_t}{(\nu_t)^{1/2}} \cdot \frac{h_p - h_f}{c_p (\theta_p)} \cdot \left(\frac{u_r}{x^*} \right)^{1/2},$$

$$Y'_0(0, 1; \mathcal{F}; 0) \cong 0,4696 \mathcal{F}^{0,35}.$$

D'après (9,3), nous aurons :

$$(9,7) \quad \Phi_p(x) = \frac{Y'_0(0,1; \mathfrak{F}; 0)}{\mathfrak{F}} \left(\frac{\mu_p \theta_t}{\mu_t \theta_p} \right)^{1/2} \frac{p_e}{p_t} \cdot \frac{\lambda_t}{(\nu_t)^{1/2}} \cdot \frac{u_e}{u_r^{1/2}} \cdot \frac{h_p - h_f}{c_p (\theta_p)} \\ \times r \left(2 \int_0^x \frac{p_e}{p_t} \cdot \frac{u_e}{u_r} r^2 dx \right)^{-1/2}.$$

Lorsque x tend vers zéro, $u_e \sim cx$ et l'on a :

$$(9,8) \quad \Phi_p(0) = \frac{2^{1/2} Y'_0(0,1; \mathfrak{F}; 0)}{\mathfrak{F}} \left(\frac{\mu_p \theta_t}{\mu_t \theta_p} \right)^{1/2} \frac{\lambda_t}{(\nu_t)^{1/2}} \cdot \frac{h_p - h_t}{c_p (\theta_p)} \sqrt{\left(\frac{du_e}{dx} \right)_{x=0}}.$$

Le rapport des deux expressions (9,7) et (9,8) est :

$$(9,9) \quad \frac{\Phi_p(x)}{\Phi_p(0)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{p_e}{p_t} \cdot \frac{u_e}{u_r} r}{\left(\int_0^x \frac{p_e}{p_t} \cdot \frac{u_e}{u_t} r^2 dx \right)^{1/2}} \cdot \frac{h_f - h_p}{(h_t - h_p) \sqrt{\frac{1}{u_r} \left(\frac{du_e}{dx} \right)_{x=0}}}.$$

On obtient, au facteur $(h_f - h_p)/(h_t - h_p)$ près (qui est voisin de 1 près du point d'arrêt), la formule du transfert de chaleur de L. LEES [42]. Celui-ci l'avait obtenue en remarquant que le terme proportionnel au gradient de pression dans l'équation de l'impulsion (8,6) est de l'ordre de $(\rho_e/\rho) - u^2/u_e^2$ et qu'il est négligeable lorsque le rapport θ_p/θ_t est faible.

Si l'on compare l'expression (9,8) avec l'expression tirée des calculs de COHEN et RESHOTKO, pour $m = 1/3$ et $k = 0$, on voit que la formule (9,7) conduit, au point d'arrêt, à une erreur relative par défaut de 5 %. Mais, comme l'hypothèse simplificatrice du paragraphe 6,44 est d'autant meilleure que M_e est plus grand, la formule (9,7) doit fournir des valeurs de plus en plus précises lorsque x croît.

CONCLUSION DE LA DEUXIÈME PARTIE

Nous avons montré, dans la deuxième partie, que, grâce à une transformation de variables, les équations de la couche limite à propriétés physiques variables se ramènent aux équations de la couche limite à propriétés physiques constantes, moyennant certaines hypothèses simplificatrices. La méthode d'intégration approchée exposée dans la première partie peut donc s'adapter au cas des grandes vitesses. On trouve alors que le facteur enthalpique pariétal obtenu dans la première approximation, est, non seulement indépendant du gradient de pression, mais encore, *indépendant du nombre de Mach de l'écoulement à l'infini amont*.

La transformation de variables se ramène, lorsque c_p est constant et lorsque la paroi est thermiquement isolée, à une transformation introduite auparavant par ROTT, TANI et l'auteur.

Les résultats obtenus grâce à la nouvelle transformation peuvent être considérés comme satisfaisants, au moins dans la gamme $0,6 < \theta_p/\theta_t < 2$, comme le montre l'application au cas particulier étudié par COHEN et RESHOTKO.

Dans le cas d'un corps de révolution arrondi, la densité de flux de chaleur pariétale Φ_p peut être calculée à l'aide de la transformation de MANGLER. L'expression de Φ_p se ramène, pour des températures de paroi faibles, à la *formule de L. LEES*, qui est bien vérifiée par l'expérience, comme on le voit dans la référence [43].

CONCLUSION GÉNÉRALE

Nous avons présenté, dans ce travail, une nouvelle méthode d'intégration approchée des équations de la couche limite dans le cas le plus général, celui où les distributions de la vitesse extérieure et de la température de paroi sont quelconques.

Lorsque les propriétés physiques du fluide peuvent être considérées comme constantes, nous avons pu montrer que, dès la deuxième approximation, les résultats numériques sont voisins des valeurs exactes obtenues par intégration numérique.

Lorsqu'il faut tenir compte de la variation des propriétés physiques, comme dans le cas des écoulements gazeux à grande vitesse, une transformation approchée de variables permet de se ramener au cas des propriétés physiques constantes. Cette transformation peut être considérée comme une extension de la transformation d'ILLINGWORTH-STEWARTSON au cas où c_p est variable, T est constant mais différent de 1, μ est une fonction quelconque de la température et où la distribution de la température de paroi est quelconque.

On obtient ainsi des résultats convenables pour la couche limite compressible, lorsque la température de paroi n'est pas trop faible devant la température totale, ou bien lorsque les nombres de Mach sont importants.

PLANCHES

PLANCHE 1

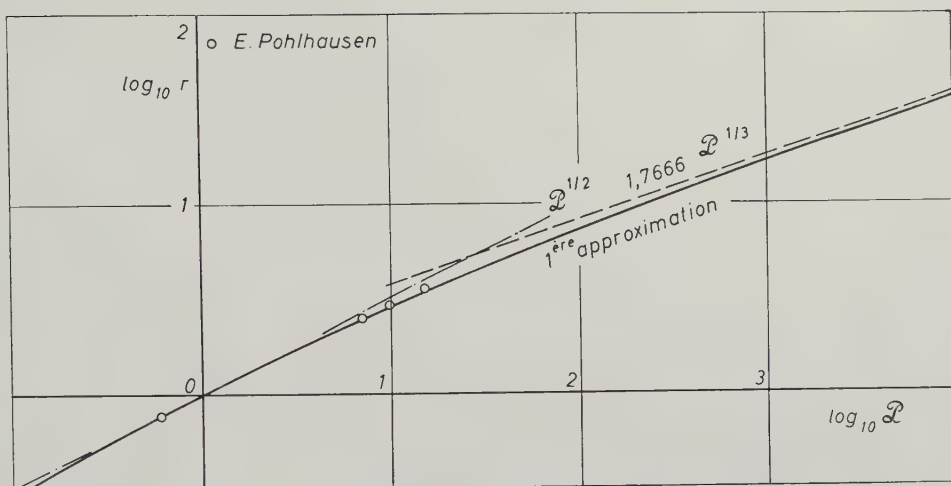


PLANCHE 2

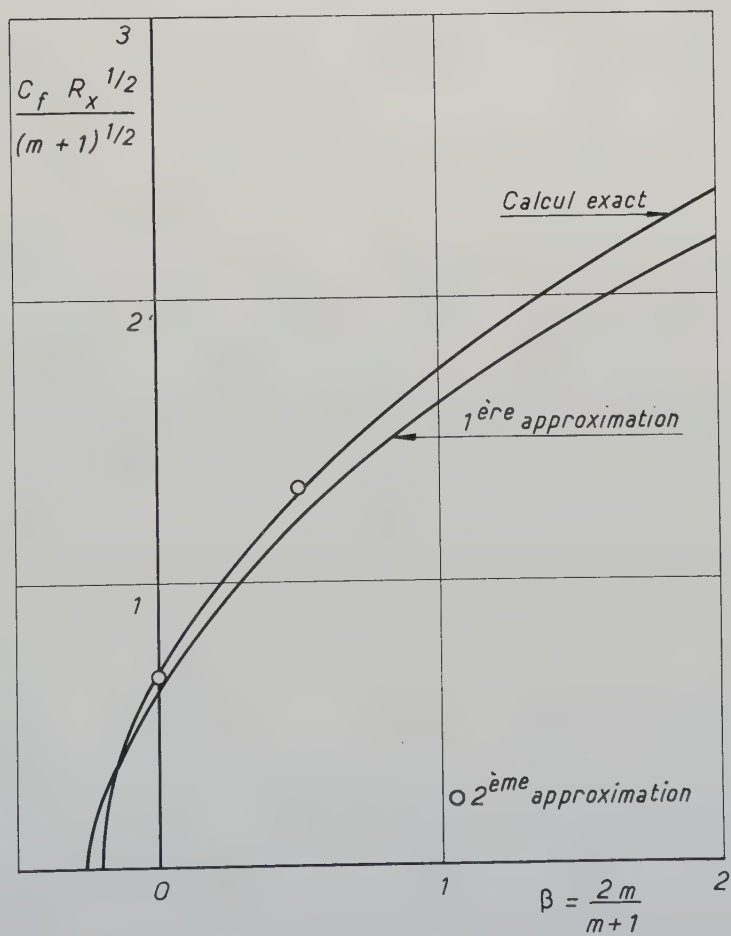


PLANCHE 3

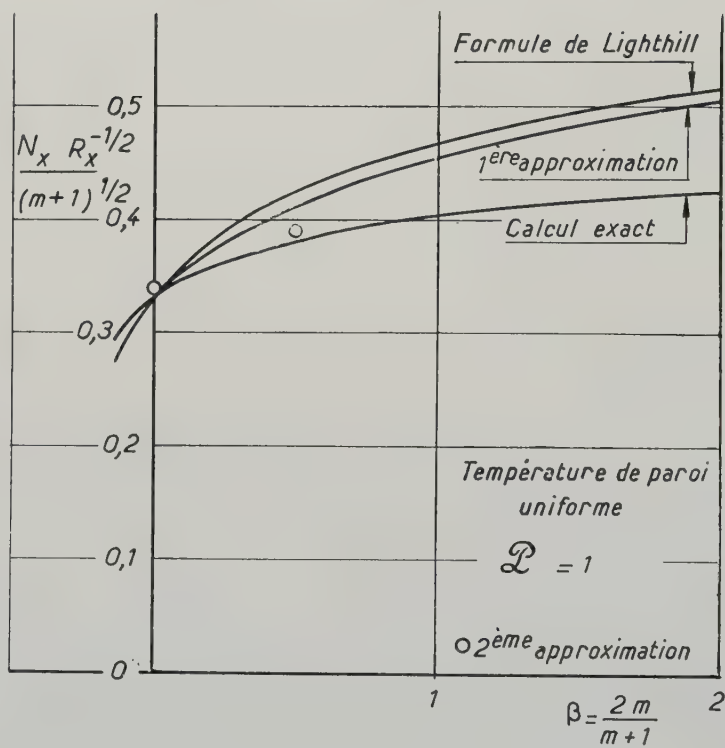


PLANCHE 4

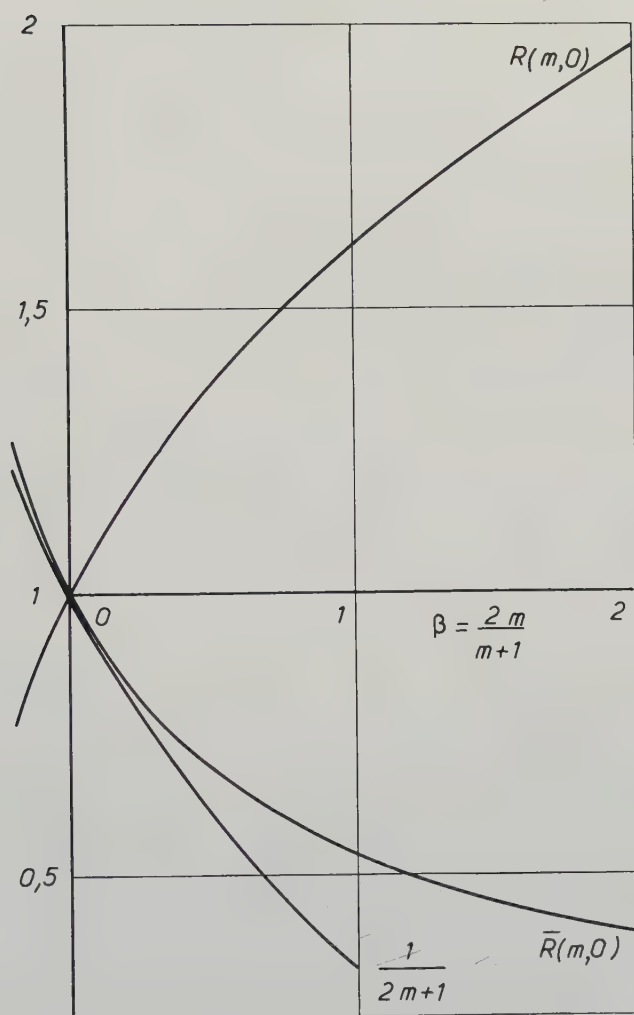


PLANCHE 5

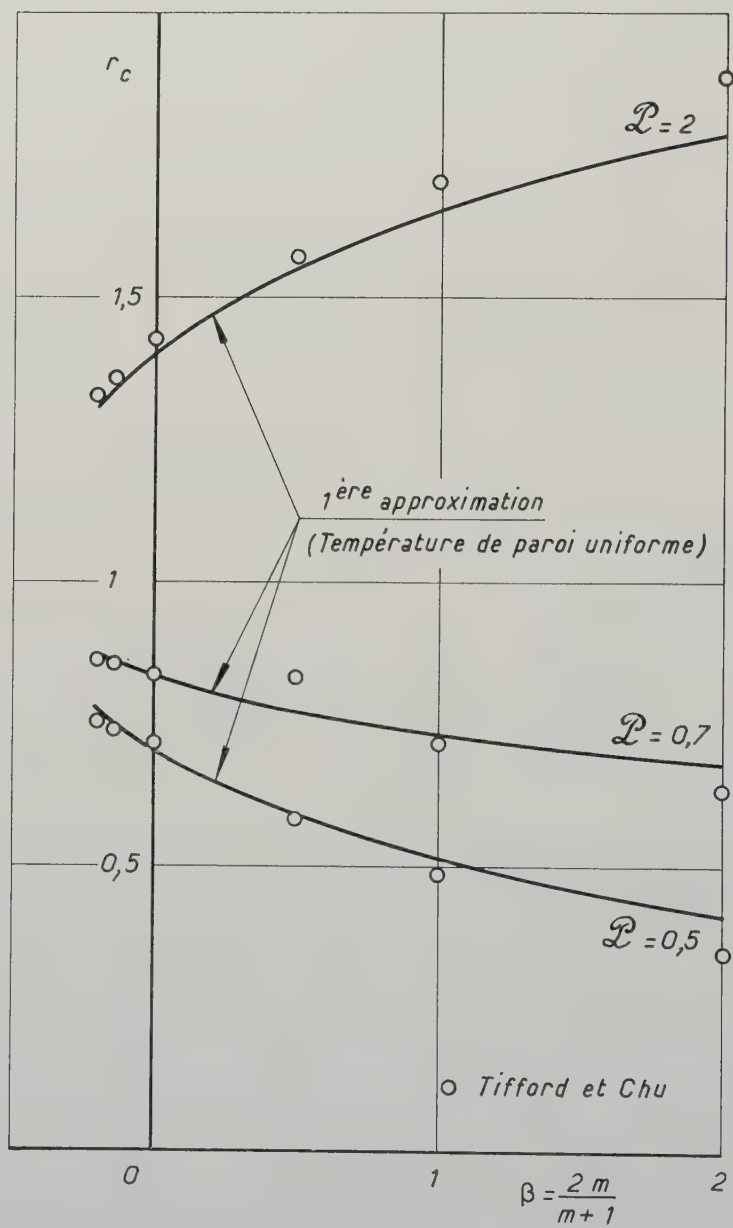


PLANCHE 6

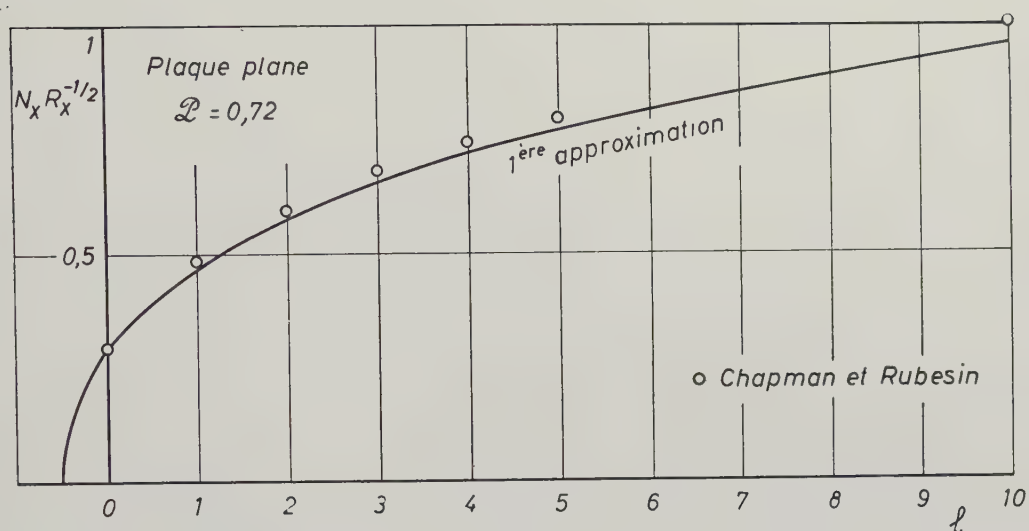


PLANCHE 7

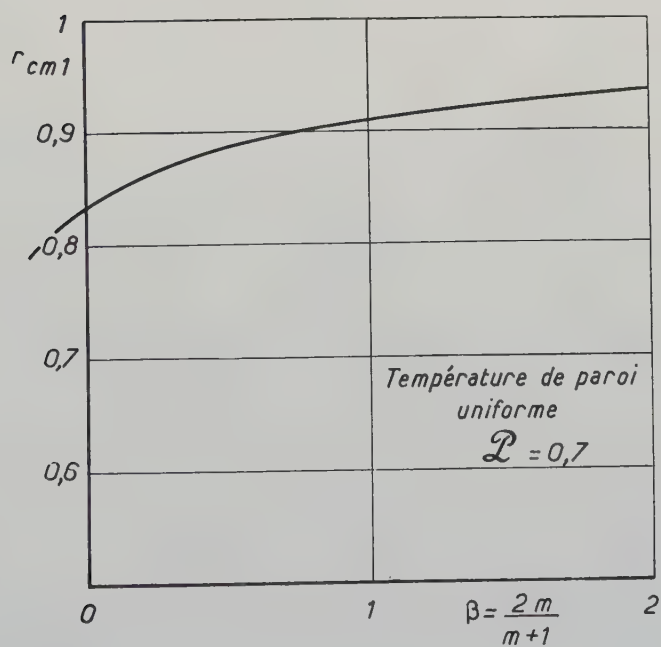


PLANCHE 8

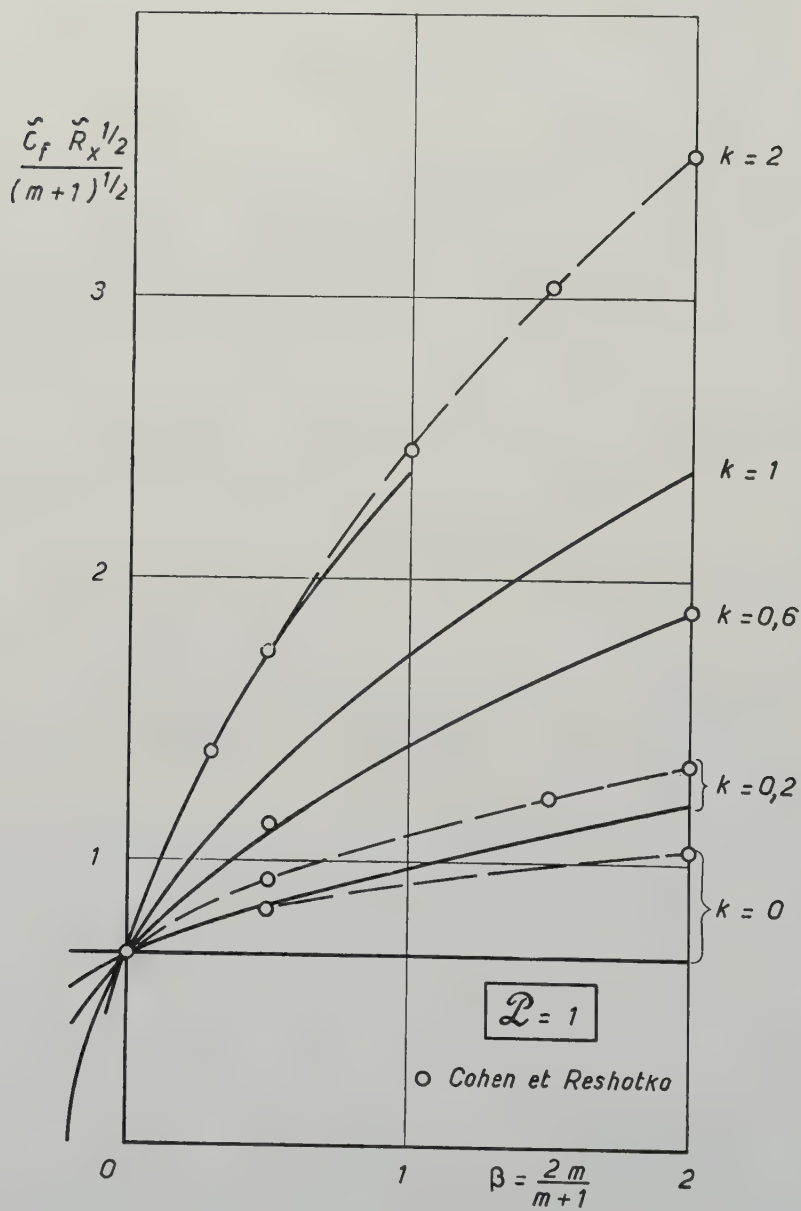
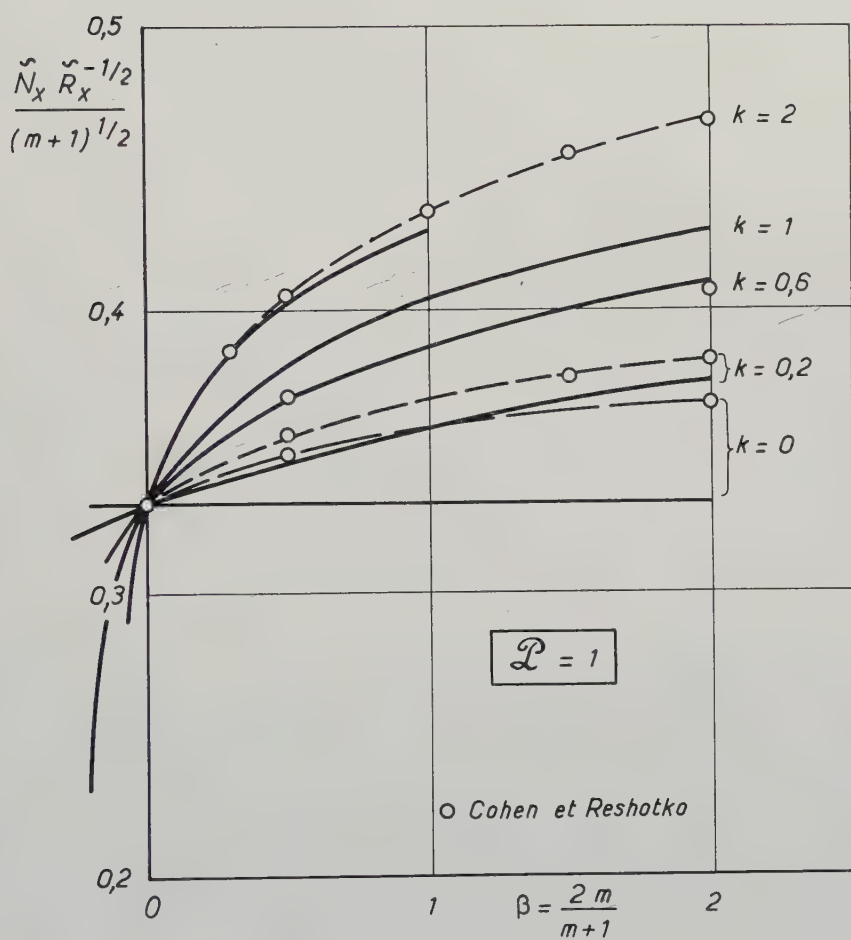


PLANCHE 9



BIBLIOGRAPHIE

- [1] E. A. BRUN. — *Introduction à l'étude de la couche limite*. Gauthier-Villars, Paris (1955).
- [2] R. VON MISES. — *Bemerkungen zur Hydrodynamik*. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, n° 7, pp. 425 à 431 (1927).
- [3] V. M. FALKNER et S. W. SKAN. — *Some approximate solutions of the boundary layer equations*. A.R.C. Report n° 1314 (1930).
- [4] D. R. HARTREE. — *On an equation occurring in Falkner and Skan's approximate treatment of the equations of the boundary layer*. Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, Vol. 33, 2^e partie (1937).
- [5] M. J. LIGHTHILL. — *Contributions to the theory of heat transfer through a laminar boundary layer*. Proceedings of the Royal Society of London, série A, vol. 202, pp. 359 à 377 (1950).
- [6] E. ECKERT et O. DREWITZ. — *Die Berechnung des Temperaturfeldes in der laminaren Grenzschicht schnell angeströmter unbeheizter Körper*. Luftfahrtforschung, vol. 19 (1942).
- [7] D. R. CHAPMAN et M. W. RUBESIN. — *Temperature and velocity profiles in the compressible laminar boundary layer with arbitrary distribution of surface temperature*. Journal of the Aeronautical Sciences (sept. 1949).
- [8] A. N. TIFFORD et S. T. CHU. — *Heat transfer in laminar boundary layers subject to surface pressure and temperature distributions*. Proceedings of the Second Midwestern Conference on Fluid Mechanics, pp. 363 à 377 (1949).
- [9] E. ECKERT. — *Die Berechnung des Wärmeüberganges in der laminaren Grenzschicht umströmter Körper*, V. D. I. — Forschungsheft, n° 416 (1942).
- [10] A. FAGE et V. M. FALKNER. — *On the relation between heat transfer and surface friction for laminar flow*. A. R. C. Reports and Memoranda, n° 1408 (1931).
- [11] A. N. TIFFORD. — *On the theory of heat transfer through a laminar boundary layer*. Reader's Forum, Journal of the Aeronautical Sciences (avril 1951).
- [12] H. W. LIEPMANN. — *A simple derivation of Lighthill's heat transfer formula*. Journal of Fluid Mechanics (janvier 1958).
- [13] D. B. SPALDING. — *Heat transfer from surfaces of non uniform temperature*. Journal of Fluid Mechanics (mai 1958).
- [14] B. LE FUR. — *Facteur thermique pariétal et densité de flux de chaleur à la paroi dans une couche limite laminaire à propriétés physiques constantes avec gradient de pression*. Comptes rendus de l'Académie des Sciences, vol. 247, n° 25, p. 2287 à 2290 (22 décembre 1958).
- [15] C. R. ILLINGWORTH. — *The effect of heat transfer on the separation of a compressible laminar boundary layer*. The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, vol. 7, 1^{re} partie (mars 1954).
- [16] E. POHLHAUSEN. — *Der Wärmeaustausch zwischen festen Körpern und Flüssigkeiten mit kleiner Reibung und kleiner Wärmeleitung*. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, n° 1, pp. 115 à 121 (1921).
- [17] E. M. SPARROW et J. L. GREGG. — *Viscous dissipation in low Prandtl number boundary layer flow*. Reader's Forum, Journal of the Aeronautical Sciences (novembre 1958).

- [18] G. W. MORGAN, A. C. PIPKIN et W. H. WARNER. — *On heat transfer in laminar boundary layer flows of liquids having a very small Prandtl number*. Journal of the Aeronautical Sciences (mars 1958).
- [19] E. BRUN, M. JAMPY et R. LECARDONNEL. — *Échanges thermiques entre un corps chauffé et l'air, quand le corps a une grande vitesse par rapport au fluide*. Comptes rendus de l'Académie des Sciences, vol. 202, pp. 1256 à 1258 (6 avril 1936).
- [20] L. POLI. — *Règles pour le calcul symbolique. Nouveau théorème du produit*. Annales de la Société Scientifique de Bruxelles, n° 63, pp. 154 à 155 (1949).
- [21] J. PÉRÈS. — *Cours de Mécanique des Fluides*. Gauthier-Villars, Paris (1936).
- [22] A. M. O. SMITH. — *Improved solutions of the Falkner and Skan boundary layer equation*. Sherman M. Fairchild Fund Paper. N° FF-10, Institute of the Aeronautical Sciences, New-York (mars 1954).
- [23] W. N. BAILEY. — *Generalized hypergeometric series*. Cambridge University Press (1935).
- [24] H. SCHUH. — *Laminar heat transfer in boundary layers at high velocities*. Report Translation, n° 810, British M. A. P. (1951).
- [25] A. N. TIFFORD. — *Some Prandtl number effects on the transfer of heat*, Engineering Experiment Station News, Ohio State University (1950).
- [26] S. LEVY et R. A. SEBAN. — *Recovery factors for the laminar « separation » and stagnation flows*. Reader's Forum, Journal of the Aeronautical Sciences (mai 1952).
- [27] J. LÉVÊQUE. — *Résolution théorique du problème de l'échange de chaleur par circulation d'un fluide visqueux en mouvement tranquille à l'intérieur d'un tube cylindrique*. Comptes rendus de l'Académie des Sciences, vol. 185, pp. 1190 à 1192 (28 novembre 1927).
- [28] H. J. MERK. — *Rapid calculations for boundary layer transfer using wedge solutions and asymptotic expansions*. Journal of Fluid Mechanics (avril 1959).
- [29] M. SIBULKIN. — *Heat transfer near the forward stagnation point of a body of revolution*. Reader's Forum, Journal of the Aeronautical Sciences (août 1952).
- [30] E. BRUN et M. VASSEUR. — *Convection forcée de la chaleur à la surface d'un corps de révolution*. Comptes rendus de l'Académie des Sciences, vol. 225, pp. 861 à 863 (10 novembre 1947).
- [31] C. B. COHEN et E. RESTOTKO. — *Similar solutions for the compressible laminar boundary layer with heat transfer and pressure gradient*. N.A.C.A. Report n° 1293 (1956).
- [32] E. BRUN. — *Répartition des températures sur un cylindre isolant en déplacement rapide dans l'air*. Comptes rendus des Séances de l'Académie des Sciences, vol. 198, pp. 1213 à 1215 (26 mars 1934).
- [33] A. A. DORODNITZIN. — *Couche limite laminaire dans un gaz compressible* (en Russe). Prikl. Matem. i Mekh, vol VI, n° 6 (1942). Voir aussi L. G. LOITSIANSKII. — *Boundary layer*. N.A.C.A. Technical Memorandum n° 1400 (1956).
- [34] L. HOWARTH. — *Concerning the effect of compressibility on laminar boundary layers and their separation*. Proceedings of the Royal Society of London, série A, vol. 194, pp. 16 à 42 (16 juillet 1948).
- [35] K. STEWARTSON. — *Correlated incompressible and compressible boundary layers*. Proceedings of the Royal Society of London, série A., vol. 200, pp. 84 à 100 (30 juin 1949).
- [36] C. R. ILLINGWORTH. — *Steady flow in the laminar boundary layer of a gas*. Proceedings of the Royal Society of London, série A., vol. 199, pp. 533 à 558 (7 décembre 1949).
- [37] N. ROTT. — *Compressible laminar boundary layer on a heat-insulated body*. Reader's Forum, Journal of the Aeronautical Sciences (janvier 1953).
- [38] I. TANI. — *On the approximate solution of the laminar boundary layer equations*. Journal of the Aeronautical Sciences (juillet 1954).

- [39] B. LE FUR. — *Calcul de la couche limite laminaire dans un écoulement compressible avec gradient de pression sur une paroi thermiquement isolée.* Journal des Recherches du C.N.R.S., n° 42 (mars 1958).
 - [40] M. PLAN. — *Méthodes d'exploration dynamique et thermique et étude de la couche limite laminaire compressible de la plaque plane.* Publications Scientifiques et Techniques du Ministère de l'Air, n° 331 (1957).
 - [41] W. MANGLER. — *Zusammenhang zwischen ebenen und rotationssymmetrischen Grenzschichten in kompressiblen Flüssigkeiten.* Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, vol. 28, pp. 97 à 103 (1948).
 - [42] L. LEES. — *Laminar heat transfer over blunt-nosed bodies at hypersonic flight speeds.* Jet Propulsion (avril 1956).
 - [43] N. H. KEMP, P. H. ROSE et R. W. DETRA. — *Laminar heat transfer around blunt bodies in dissociated air.* Journal of the Aero-Space Sciences (juillet 1959).
-

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

DISTRIBUTION
DES TEMPÉRATURES DE FROTTEMENT
SUR DES MAQUETTES D'AILE DROITE
ET D'AILE EN FLÈCHE

Vu et approuvé :

Paris, le 6 juin 1960

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

J. PÉRÈS.

Vu et permis d'imprimer :

Le Recteur de l'Académie de Paris,

Jean SARRAILH.



IMPRIMERIE

